朝倉物理学大系
荒船次郎|江沢 洋|中村孔一|米沢富美子＝編集

4

素粒子物理学の基礎II

長島順清
[著]

朝倉書店

はじめに

本書は，これから素粒子物理学を目指そうと試みる理科系の学生，もしくは素粒子物理学を専門としてではないが基本から学ぶ意欲があり，そのためには式のチェックの労をいとわない人々を対象とした素粒子物理学の入門書であり，多彩な素粒子現象の一部を紹介することを試みた．

素粒子物理学は，数学的道具として場の量子論を使う．場の量子論は量子力学と特殊相対性理論をドッキングさせたものである．しかし相対性理論を必要とする現象はほとんど素粒子と一部の宇宙現象に限られており，大学で相対論まで学ぶ人は少ない．この事実が，そして場の量子論の数学的難解さが，素粒子物理学を近づきがたい学問としている．数学的な面を多少なりとも整合的に解説しようとすると，素粒子現象の詳細にふれる余裕はない．場の理論の教科書は数多くあるのに反し，彩り豊かな素粒子現象の包括的な解説書が少ないのは，実験成果が日進月歩で出現しつつある現状では，瞬く間に時代遅れとなるからであろう．しかしながら，数少ないこの方面の解説書を苦労して探しても，式は説明なしに与えてしまっていることが多く，大学院生のゼミのためのバランスのとれた教科書の必要性を常日頃感じていた．

この文章を読んでいる人で，過去に量子力学の展開する世界に驚愕し魅せられた人は多いであろう．いったん量子力学に踏み込んだ後は，自分の世界観が全く変わってしまったことを認識すると思う．しかし，シュレーディンガー方程式を理解せずに量子力学を学んだとしたら理解の深さはどの程度であったろうか．現象の解説書に多い，天下りに式を与える方式に筆者が抵抗を覚えるのはこの理由による．

本書では，素粒子現象を理解するための必要な準備として，場の量子論の初

歩的解説をまず分冊 I で行う．しかし，目的はあくまでも素粒子現象の理解であるから，数学的な詳細には踏み込むことは避けた．分冊 I の目標は対象とする素粒子反応を場の量子論を使って，少なくも摂動の最低次（トリー近似）では正確に自分で計算できるようにすることである．高次計算については概念的な解説に止めた．この本を学習するために量子力学の知識は必要であるが，それ以上は要求していない．実験がどのようにして行われるかの必要最低限の知識を与えるために，加速器と測定器の章を一つ設けた．この組み合わせに戸惑う人はこの章を省略しても構わないが，純粋に理論を目指す人でも，この程度の実験的技術の知識はもっていて欲しいと思う筆者の願いである．

分冊 II では素粒子現象について解説するが，素粒子のクォーク構造を理解することと，統一理論が成立していく過程に重点を絞った．このため電弱相互作用現象に重点を置き，ハドロン現象は最小限に止めている．K 中間子における CP の破れ現象は，この筋から外れるにも関わらず含めたのは，現象としては 1962 年にすでに発見されていたこと，K 中間子崩壊の実験的な蓄積が，最も厳密な CPT 保存の検証証拠を与えることを重視したからである．ただし，統一理論からの切り口は別の巻に譲った．統一理論の成立をもってこの素粒子物理学入門解説の区切りとしたため，実験データは最新であるものの，標準理論が予言して 1970 年以降に発見された新現象は含まれていない．標準理論の詳細な枠組みと予言，その実験的検証については，独立な解説本として本シリーズ第 5 巻『素粒子標準理論と実験的基礎』として出版する予定である．標準理論の中で未解明の部分，すなわち CP 非保存現象とヒッグスの物理，さらには標準理論を超える現象については，もう一つ別の独立な本として本シリーズ第 6 巻『高エネルギー物理学の発展』として出版予定である．

この本で心がけたことは，後々までも参考書として使えるようにするということである．そのために章ごとに話題が完結するように心がけ，後で参照しやすい形とした．また，引用文献，付録に載せる式などは本文で必要なもの以上に集めてある．この結果として，各章の後半では多少むずかしいテーマを扱うこともある．習熟レベルに照らして難度が高いと思われるセクションや演習問題には * 印を付けた．むずかしいと感じたら無理に理解しようと思わず先に進んで，後で参照する参考とされたい．

終わりに，本書を執筆する機会を与えて下さった編集者の荒船次郎氏と江沢洋氏に感謝する．特に荒船氏には全編を通して詳細に査読し間違いを指摘していただきまたサジェッションもいただいた．荒船氏の叱咤激励なしにはこの本は完成しなかったろう．大阪大学の吉川圭二，高杉英一，東島 清の諸氏にはいろいろご批判ご指導をいただいた．また，この執筆のため筆者の研究室スタッフ・学生諸氏にはいろいろ協力していただいた．この場を借りて感謝の意を表する次第である．最後に，本書の刊行に向けご面倒をおかけした朝倉書店の方々に感謝の意を表する．

1998年10月

筆　　者

目　　次

第I巻目次

8
ハドロン・スペクトロスコピー

スペクトロスコピー（分光学）とは，一見複雑に見える光の波形をプリズムで分け，単振動の集まりとして分析解析する学問の一分野である．単振動は量子力学的には，エネルギーの一つの準位もしくは粒子であるので，広く解釈してこれらの収集分類をも指すようになった．物理現象の基本法則に到達する上で欠かせない過程である．原子構造を知る上で果たした元素の周期律表の役割，量子力学の本質理解に不可欠であった原子発光スペクトルの研究の重要性がただちに挙げられる．同じような意味で，かつては素粒子と考えられたハドロンや素粒子同士の力学的現象と考えられた共鳴を人工的に生成し，スピン，パリティその他の量子特性を決定して分類整理することは，基本粒子クォークという概念に到達する上で不可欠な過程であった．この章では，K や η 中間子などのハドロン新粒子の性質やたくさんのハドロン共鳴をどうしてつくりまた性質をいかに決めるかを解説する．また，高エネルギー極限でハドロンの散乱断面積がどのように振る舞うかの定性的議論をも行う．ハドロンの分類からどのようにクォークモデルに発展していくかの様子は次章で解説する．

8.1　共鳴の生成と崩壊

π 中間子は，運動エネルギーが 300 MeV 以上の陽子を物質に当てれば簡単に生成できるので，π と核子（以下 N と書いて，中性子の n と区別する）との反応は最もよく調べられているものの一つである．その中でも興味の対象となったのは，散乱の断面積が特定のエネルギーのところで大きく増加する共鳴現象である．コスモトロン (3 GeV) とベヴァトロン (6 GeV) という高エネル

ギー加速器の稼働と，泡箱という強力な測定器の開発と相まって，1960年代は，中間子による散乱，多重粒子発生現象により，多くのハドロン共鳴が発見された時期であった．この時期には，K中間子や，ハイペロン共鳴もまた調べられたが，ストレンジネスという新しい量子数による選択則を別にすれば，反応現象の運動学的構造 (kinematics) は π 中間子と核子の系と変わらない．したがって，ここでは πN 系を主として解説しよう．πN 系の共鳴 (N^*, N^{**} と書く）は原子や原子核の準位と同じくエネルギーの低い下の準位に遷移して，最終的には1個のNと複数個の π 中間子となる[*1)]．すなわち

$$\pi+\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N}^{**} \longrightarrow \mathrm{N}^{*}+n\pi \longrightarrow \mathrm{N}+m\pi \qquad (8.1)$$

バリオン数の保存により，N^{**} や N^* はバリオン数1をもつ．π と核子を反応させると，図8.1のようにいろいろな共鳴がつくられる．

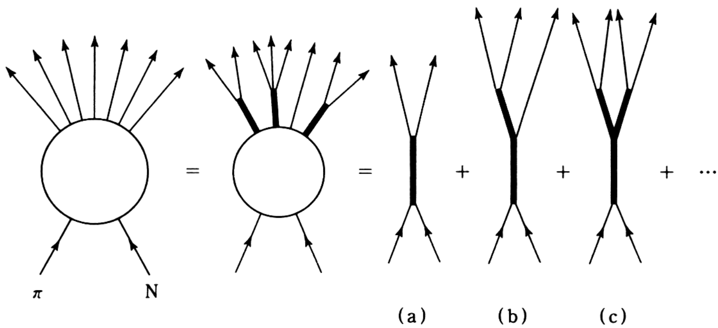


図 8.1　$\pi\mathrm{N} \rightarrow m\pi+\mathrm{N}$ のいろいろなパターン
細線は π や核子など安定粒子（崩壊前の飛距離が測定にかかる程度にゆっくり（$10^{-8}\sim10^{-10}$ 秒）と崩壊する粒子（K, Λ, Σ 粒子など）を含む）を示し，▬は共鳴（崩壊寿命が短い（$\lesssim10^{-23}$ 秒）粒子）を示す．

ハドロン共鳴は，だいだい10～100 MeVくらいの幅 (Γ) をもつので，ハドロン共鳴の寿命 τ は，$\tau\sim\hbar/\Gamma\sim10^{-22}\sim10^{-23}$ 秒くらいである．光速に近い速さで走っても，飛距離は $c\tau\sim10^{-13}$ cm であるから，観測に掛かるのは，共鳴の崩壊してできた残骸のみであるが，エネルギー運動量の保存則により，崩壊粒子のエネルギー運動量を測定すれば共鳴の質量（不変質量ともいう）M が定義できる．各崩壊粒子の4元運動量を p_i として

*1)　反粒子はバリオン数−1をもつから，バリオン反バリオンの対が余分に入っていてもよいが，ここでは比較的低エネルギー領域を考えるので考察外とする．

$$M^2=(p_1+p_2+\cdots)^2$$
$$=(E_1+E_2+\cdots)^2-(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\cdots)^2 \tag{8.2}$$

したがって，共鳴を見つけるには π 中間子多重発生反応において，n 個の終状態から $m\pi$ または $m\pi+$(1個の核子) を拾いだし，(8.2) の不変質量の関数として反応頻度をプロットして，そこに山が現れるかどうかを見ればよい．特に共鳴が入射粒子 1 (π) と粒子 2 (核子 N) で形成される場合 (図 8.1 (a)) は，不変質量は

$$M^2=(p_1+p_2)^2=s=(E_1+m_2)^2-\boldsymbol{p}_1{}^2$$
$$=(m_1+m_2)^2+2m_2T_1 \tag{8.3}$$

ただし，粒子 2 を静止している標的粒子 (＝陽子) であるとし，$\boldsymbol{p}_2=0$ を使った，$T_1=E_1-m_1$ は入射粒子の運動エネルギーである．したがって，散乱断面積を入射粒子の運動エネルギーの関数としてプロットし，共鳴 (不変質量の関数として山もしくは肩 (bump)) が存在すれば，その質量はただちに知れる (例として図 6.8 を見よ)．$T_\pi=190$ MeV に現れるのが，質量 1232 MeV の $\Delta(1232)$ ($J=I=3/2$ なので通称 33 共鳴) と呼ばれる共鳴である．たくさんある共鳴を整理分類するためには，これらの共鳴のもつ量子数，特にアイソスピン，スピンおよびパリティを決めなければならない．

8.2 πN 散 乱

8.2.1 部 分 波 解 析

通常の散乱過程では，必ずしも中間状態として共鳴を経過する過程が優勢であるとは限らない．共鳴領域をはずれている角運動量状態からの寄与は，エネルギーとともに緩やかに変化するバックグラウンドとして寄与する．また，非弾性散乱などでたくさんのチャネルが開けているときは，仮に共鳴があっても，断面積に鋭い山として現れるほど弾性散乱の振幅は大きくないときもある．このため種々の部分波を取り入れた総合解析が必要となる．その出発点となるのは，第 6 章で導いた散乱振幅の部分波展開の式である．散乱振幅の定義 ((6.51)，(6.52)) と，パリティ変換則 (6.91)，パリティ保存則より導かれる性質 (6.92) などをもう一度掲げる．

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=|f_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}|^2 \tag{8.4}$$

$$f_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}=\frac{1}{2p}\sum_J(2J+1)\langle\lambda_3\lambda_4|T^J(E)|\lambda_1\lambda_2\rangle \mathrm{d}^J_{\lambda\mu}(\theta)\mathrm{e}^{i(\lambda-\mu)\phi} \tag{8.5}$$

$$P|JM;\lambda_1,\lambda_2\rangle=\eta_1\eta_2(-1)^{J-s_1-s_2}|J\lambda;-\lambda_1,-\lambda_2\rangle \tag{8.6}$$

$$\langle-\lambda_3,-\lambda_4|S^J|-\lambda_1,-\lambda_2\rangle=\eta_S\langle\lambda_3\lambda_4|S^J|\lambda_1\lambda_2\rangle \tag{8.7 a}$$

$$\eta_S=\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4(-1)^{s_3+s_4-s_1-s_2} \tag{8.7 b}$$

$$\langle-\lambda_3,-\lambda_4|f(\theta,\phi)|-\lambda_1,-\lambda_2\rangle=\eta_S\langle\lambda_3\lambda_4|f(\theta,\pi-\phi)|\lambda_1\lambda_2\rangle \tag{8.8}$$

核子はスピンをもつが π はもたないので，$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\pm1/2$ である．以下簡単のため，$\pm1/2$ の代わりに $\pm$ と書くことにする．パリティ保存則 (8.7) より

$$S^J{}_{++}=S^J{}_{--}, \qquad S^J{}_{+-}=S^J{}_{-+} \tag{8.9}$$

が成立する．軌道角運動量を L とすれば，$L=J\pm1/2$ である．パリティ変換式 (8.6) は，π が固有パリティ (-1) をもつことを考量すると，πN 散乱では

$$P|JM;\pm\rangle=-(-1)^{J-1/2}|JM;\mp\rangle \tag{8.10}$$

となる．パリティ固有状態は

$$|J_-\rangle\equiv(1/\sqrt{2})\quad[|JM;+\rangle+|JM;-\rangle] \tag{8.11 a}$$

$$|J_+\rangle\equiv(1/\sqrt{2})\quad[|JM;+\rangle-|JM;-\rangle] \tag{8.11 b}$$

であり，$|J_\mp\rangle$ は，パリティ $\mp(-1)^{J-1/2}$ をもつ．すなわち $|J_\mp\rangle$ は，$L=J\mp1/2$ に対応する．(8.9) を使えば，J を決めれば独立な振幅は 2 個のみである．同じ J をもつ状態の二つの L は 1 だけ異なるからパリティの違う状態であり，パリティ保存が成立すれば混じることはない．したがって $|J_\mp\rangle$ でつくった S 行列の部分行列は対角化しており，S 行列のユニタリー性からそれぞれ

$$S^{J-}=\mathrm{e}^{2i\delta_{J-}}, \qquad S^{J+}=\mathrm{e}^{2i\delta_{J+}} \tag{8.12}$$

と書ける．非弾性散乱があるときはユニタリー条件が変わるが，入射粒子のフラックスが消えたと解釈し，位相のずれ δ_J に正の虚数部分をもたせることにより上記の形を保持することが可能である． すなわち， $\mathrm{e}^{2i\delta_J}=\eta_J\mathrm{e}^{-2i\mathrm{Re}\delta_J}$, $\eta_J=\mathrm{e}^{-2\mathrm{Im}\delta_J}$ とすれば，(8.11) と (8.12) および $S=1+iT$ より

$$\frac{T^J{}_{++}}{2p}\equiv\frac{\langle JM;+|T|JM;+\rangle}{2p}=\frac{S^J{}_{++}-1}{2ip}=\frac{(\mathrm{e}^{2i\delta_{J-}}+\mathrm{e}^{2i\delta_{J+}}-2)}{4ip}=\frac{(f_{J-}+f_{J+})}{2} \tag{8.13 a}$$

$$f_{J\pm}=\frac{1}{p}e^{i\delta_{J\pm}}\sin\delta_{J\pm} \tag{8.14}$$

が導ける．同様に

$$\frac{T^J{}_{+-}}{2p}\equiv\frac{\langle JM;+|T|JM;-\rangle}{2p}=\frac{(f_{J-}-f_{J+})}{2} \tag{8.13 b}$$

(8.13), (8.14) を (8.5) に入れ，付録 (D.19) を参照して，$d^J_{\lambda\mu}(\theta)$ を書き換えれば，

$$f_{++}=\sum(f_{J-}+f_{J+})\cos\frac{\theta}{2}[P'_{J+1/2}(\theta)-P'_{J-1/2}(\theta)] \tag{8.15 a}$$

$$f_{+-}=\sum(f_{J-}-f_{J+})\sin\frac{\theta}{2}[P'_{J+1/2}(\theta)+P'_{J-1/2}(\theta)]e^{-i\phi} \tag{8.15 b}$$

ここに，$P'_L(\theta)=\mathrm{d}\,P_L/\mathrm{d}\cos\theta$，$P_L$ はルジャンドル多項式である．他の二つの振幅 f_{--} と f_{-+} は (8.8) を使い，$\phi=0$ と設定すれば

$$f_{++}=f_{--},\qquad f_{-+}=-f_{+-} \tag{8.16}$$

となる．

通常の散乱ではヘリシティ状態は見ないのが普通である．このときは，始状態のヘリシティ状態の平均をとり，終状態については足しあげるから

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{2}\sum_{\lambda\mu}|f_{\mu\lambda}|^2=|f_{++}|^2+|f_{+-}|^2 \tag{8.17}$$

8.2.2 核子の偏極

πN 散乱の終状態核子は，反応平面に垂直な方向に偏極する．このことは，次のようにしていえる．核子の始状態終状態にはそれぞれ 2 の自由度があるから，散乱振幅は 2×2 行列として，単位行列 1 とパウリ行列 σ で表せ，かつ相互作用の回転不変性の結果として回転のスカラー量でなければならない．反応に現れる物理量は始状態運動量 $\boldsymbol{p}_i$，終状態運動量 $\boldsymbol{p}_f$ のみであるから，これらと組み合わせてつくれる回転不変なスカラー量は

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_i,\qquad \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_f \tag{8.18 a}$$

$$1,\qquad \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_i\times\boldsymbol{p}_f \tag{8.18 b}$$

である．このうち，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_i$, $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_f$ はパリティ演算で符号を変えるので，パリティを保存する反応では存在しえない．したがって 1 と $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_i\times\boldsymbol{p}_f$ のみ許さ

れる．前者は核子偏極に寄与しない．後者から，核子の偏極が反応平面に垂直な方向にのみ許されることがわかる．

$\phi=0$ と設定した場合は，反応は x-z 平面で起きるから，y 軸方向の偏極を問題にしているわけである．いま，終状態核子の運動方向を，新しく z 軸にとれば，σ_y の固有状態は，ヘリシティ状態から次のようにしてつくれる．

$$|\uparrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+i|-\rangle) \tag{8.19 a}$$

$$|\downarrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle-i|-\rangle) \tag{8.19 b}$$

終状態核子が，スピン上向き ($s_y=1/2$) になる確率は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\uparrow)&=\frac{1}{2}\sum_\lambda|\langle\uparrow|f|\lambda\rangle|^2=\frac{1}{4}\sum_\lambda|f_{+\lambda}-if_{-\lambda}|^2\\&=\mathrm{Im}(f_{+-}{}^*f_{++})+(|f_{++}|^2+|f_{+-}|^2)/2\end{aligned} \tag{8.20}$$

で与えられる．下向きの確率も同様に計算して，偏極度 P は

$$P\equiv\frac{\mathrm{d}\sigma(\uparrow)-\mathrm{d}\sigma(\downarrow)}{\mathrm{d}\sigma(\uparrow)+\mathrm{d}\sigma(\downarrow)}=\frac{2\mathrm{Im}(f_{+-}{}^*f_{++})}{|f_{++}|^2+|f_{+-}|^2} \tag{8.21}$$

となる．偏極は，断面積の角分布とは独立の情報を与える．例えば，すぐ後に述べるように同じ J であれば角分布は同じで，L もしくはパリティの区別はつかないが，偏極実験を行えば，パリティが違えば違う符号を与えるので不定性を除くのに役立つ．

8.2.3　部分波微分断面積

a.　角　分　布

特定の J, L が効いているときの断面積は，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}&=\left(J+\frac{1}{2}\right)^2|f_{J\pm}|^2[(d^J_{1/2,1/2})^2+(d^J_{1/2,-1/2})^2]\\&=2\pi(2J+1)|f_{J\pm}|^2I_J(\theta)\end{aligned} \tag{8.22}$$

ここで，$I_J(\theta)$ は，全立体角で積分すれば 1 になるように規格化された角分布である．

$J=1/2$ のとき，f_{J-} が $L=0$, f_{J+} が $L=1$ に対応する．純粋に一つの部分波しか寄与しないときは，(8.15) より

$$S_{1/2}:\quad f_{++}=f_{1/2-}\cos(\theta/2),\qquad f_{+-}=f_{1/2-}\sin(\theta/2) \tag{8.23 a}$$

$$P_{1/2}:\quad f_{++}=f_{1/2+}\cos(\theta/2),\qquad f_{+-}=-f_{1/2+}\sin(\theta/2) \tag{8.23 b}$$

であるので，L_J（$L=0, 1, 2, 3, \cdots$ に対応して S, P, D という記号を使う）というスペクトロスコピーの記号を使うと，微分断面積は次のようになる．

$$S_{1/2}:\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=|f_{1/2-}|^2,\qquad P_{1/2}:\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=|f_{1/2+}|^2 \tag{8.24}$$

同様に，

$$P_{3/2}:\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=8\pi|f_{3/2-}|^2\frac{(1+3\cos^2\theta)}{8\pi} \tag{8.25 a}$$

$$D_{3/2}:\quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=8\pi|f_{3/2+}|^2\frac{(1+3\cos^2\theta)}{8\pi} \tag{8.25 b}$$

となる．上式から角分布はパリティに関係しないことがわかる．式 (8.22) を眺めれば，J が等しいときは L が違っても同じ角分布を与えることが一般にいえる．

b. 共　　鳴

振幅を部分波に分けたとき，共鳴がどう表現されるかをみよう．中間状態 n を共鳴状態とすると，共鳴状態を通過する散乱振幅は，量子力学における摂動論から類推すると

$$T_{\mathrm{fi}}\sim\frac{\langle f|H_{\mathrm{I}}|n\rangle\langle n|H_{\mathrm{I}}|i\rangle}{E_0-E_n}\sim\frac{\sqrt{\Gamma_{\mathrm{f}}}\sqrt{\Gamma_{\mathrm{i}}}}{E_0-(E_{\mathrm{R}}-i(\Gamma/2))} \tag{8.26}$$

のように，$E_0=E_{\mathrm{R}}-i(\Gamma/2)$ に極をもつであろう．ただし，$\Gamma_{\mathrm{i}}\sim|\langle n|H_{\mathrm{I}}|i\rangle|^2$, $\Gamma_{\mathrm{f}}\sim|\langle f|H_{\mathrm{I}}|n\rangle|^2$ は，共鳴状態からの $|i\rangle$, $|f\rangle$ 状態への部分崩壊率であり，分母の $E_n\to E_{\mathrm{R}}-i\Gamma/2$ と置き換えた．Γ は全崩壊率である．散乱行列 S は

$$S=\mathrm{e}^{2i\delta}=\frac{\cot\delta+i}{\cot\delta-i} \tag{8.27}$$

と書けるから，$\cot\delta$ を，E_{R} の付近でテイラー展開すると，

$$\cot\delta=\cot\delta\Big|_{E_{\mathrm{R}}}+(E-E_{\mathrm{R}})\frac{\mathrm{d}\cot\delta}{\mathrm{d}E}\Big|_{E_{\mathrm{R}}}+\cdots\cdots \tag{8.28}$$

であるので，

$$\cot\delta|_{E_{\mathrm{R}}}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\cot\delta}{\mathrm{d}E}\Big|_{E_{\mathrm{R}}}=-\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}E}\Big|_{E_{\mathrm{R}}}=-\frac{2}{\Gamma} \tag{8.29}$$

とおけば，

$$S \sim \frac{E-E_{\mathrm{R}}-i(\Gamma/2)}{E-E_{\mathrm{R}}+i(\Gamma/2)} \tag{8.30}$$

散乱振幅は

$$f(E)=\frac{\mathrm{e}^{i\delta}\sin\delta}{p}=-\frac{1}{p}\frac{\Gamma/2}{E-E_{\mathrm{R}}+i\Gamma/2} \tag{8.31}$$

となり望みの形をもつ．つまり，共鳴とは，部分波の位相のずれ δ_J が $\pi/2 \pm n\pi$ になるところであると定義できる．Γ の定義をみればわかるように，位相のずれがエネルギーの関数として $\pi/2$ 付近で急激に増加していれば，Γ が小さくなること，したがって鋭いピークがみられることがわかる．

c．ユニタリー極限

各部分波について，$S^J=\mathrm{e}^{2i\delta_J}$ のとりうる範囲は決まっているので，次のユニタリー極限が成立する．確率の保存と言い換えてもよい．

$$|f_{J\pm}|^2=\frac{\sin^2\delta_{J\pm}}{p^2}\leqq\frac{1}{p^2} \tag{8.32}$$

特定の J をもつ部分波の断面積は，標的が偏極していない場合，共鳴付近では，(8.22)，(8.31) より

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{2\pi(2J+1)}{p^2}\frac{(\Gamma/2)^2}{(E-E_{\mathrm{R}})^2+(\Gamma/2)^2}I_J(\theta) \tag{8.33 a}$$

非弾性散乱のときは（$i\neq f$, (8.26) を参照），

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{2\pi(2J+1)}{p^2}\frac{(\Gamma_{\mathrm{f}}/2)(\Gamma_{\mathrm{i}}/2)}{(E-E_{\mathrm{R}})^2+(\Gamma/2)^2}I_J(\theta) \tag{8.33 b}$$

特に $J=3/2$ のときは，

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{8\pi}{p^2}\frac{(\Gamma_{\mathrm{f}}/2)(\Gamma_{\mathrm{i}}/2)}{(E-E_{\mathrm{R}})^2+(\Gamma/2)^2}\{(1+3\cos^2\theta)/8\pi\} \tag{8.34}$$

で与えられる．

(8.33 a) を眺めれば，$E=E_{\mathrm{R}}$ で共鳴が実現し，非弾性散乱がないときは，ユニタリー極限値をとることがわかる．

8.2.4 Δ(1232)

a．ス ピ ン

Δ(1232)（以下この章では混乱のない限り Δ と略記する）は，

$$\pi+\mathrm{N}\longrightarrow\Delta\longrightarrow\pi+\mathrm{N} \tag{8.35}$$

のように，πN 散乱での中間状態として現れる．四つの電荷状態 ($\Delta^{++}, \Delta^{+}, \Delta^{0}, \Delta^{-}$) があり，アイソスピンは 3/2 である．角運動量 J を決めるために，Δ 生成の全断面積をユニタリー極限と比較してみよう．$J=3/2$ であれば，$E=E_{\mathrm{R}}$ のときは，(8.33) から弾性散乱の断面積は最大のユニタリー極限値 $(8\pi/p^2)$ をとる．$\Delta(1232)$ のときは，入射 π の運動エネルギーが ~180 MeV と低エネルギーであり，非弾性散乱チャネルが開けていないので ($\Gamma_{\mathrm{i}}=\Gamma_{\mathrm{f}}=\Gamma$)，ほぼ完璧なユニタリー極限が実現されている（図 8.2 (a)）．これから，Δ のスピン J は 3/2 と決められる．一方 $J=3/2$ をもてば，角分布は (8.25) で与えられる分布となるはずである．$T=190$ MeV での角分布データ図 8.2 (b)[1] は確かにそうなっている．

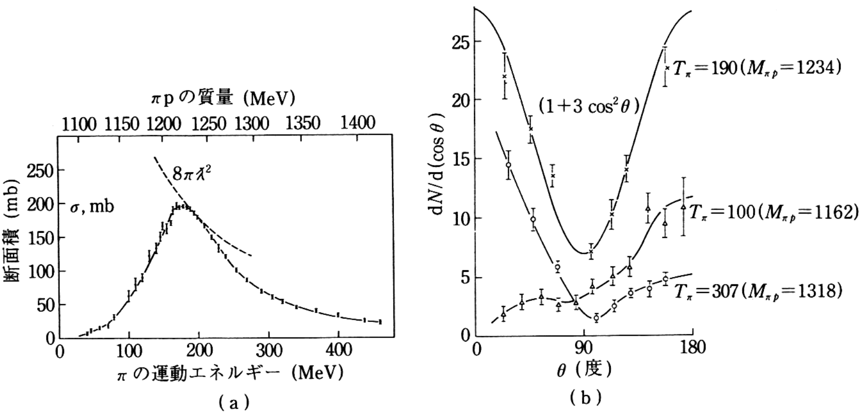


図 8.2　(a)　$\Delta(1232)$　(33共鳴) はユニタリー極限 $8\pi\lambda\!\!\!^{-2}=8\pi/p^2$ に達している．
(b)　$\Delta(1232)$ 付近前後の πN 系の角分布
角度は重心系での π の散乱角を表す．Δ 共鳴（πN 系の不変質量＝1232 MeV，$T_\pi=190$ MeV）では角分布が $1+3\cos^2\theta$ によく合う．

b.　パリティ

L が違っても J が同じだと角分布は同じであるので，角分布のみからは L の区別がつかない．したがってパリティ

$$P(\Delta)=P_\pi P_{\mathrm{p}}(-1)^L=(-1)^{L+1} \tag{8.36}$$

は決まらない．パリティを決めるには，共鳴ではない他の散乱波（エネルギーの関数として緩やかに変化する）との干渉を利用する．軌道角運動量は，古典

的には $\boldsymbol{L}\sim\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ に対応する．$\boldsymbol{r}$ は力の及ぶ範囲であり，だいたい 10^{-13} cm $\sim(200\ \mathrm{MeV/c})^{-1}$ であるので，Δ 領域（$T_\pi\lesssim 190$ MeV または $p\lesssim 300$ MeV/c）では，$L=0,1$ のみが効くと考えてよい．したがって，$L=2$ の $D_{3/2}$ ($f_{3/2-}\equiv D$ と書く）ではなく，$L=1$ の $P_{3/2}$ ($f_{3/2+}\equiv P$) であろうことは察しがつく．これを確認するため，$J=3/2$ の共鳴に，$L=0$ の S 波の寄与 ($f_{1/2+}\equiv S$) があると角分布がどう変わるかを見てみよう．(8.15) を使って微分断面積を計算すると

S と P の場合：

$$d\sigma\sim|S|^2+|P|^2(1+3\cos^2\theta)+4\mathrm{Re}(S^*P)\cos\theta \qquad (8.37)$$

S と D の場合：

$$d\sigma\sim|S|^2+|D|^2(1+3\cos^2\theta)+2\mathrm{Re}(S^*D)(3\cos^2\theta-1) \qquad (8.38)$$

これから，$P_{3/2}$ であるなら S 波との干渉項から $\cos\theta$ 項がでてきて，角分布は非対称になるが，$D_{3/2}$ のときは非対称項はでてこない．一般に，非対称はパリティの異なる部分波の干渉から生じる．

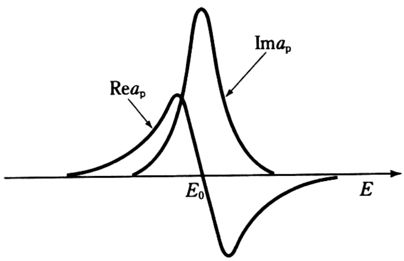


図 8.3　共鳴散乱振幅の定性的振る舞い

共鳴散乱の振幅 P は，(8.31) でみたように

$$P\sim\frac{1}{E-E_0+i(\Gamma/2)}=\frac{E-E_0-i(\Gamma/2)}{(E-E_0)^2+(\Gamma/2)^2} \qquad (8.39)$$

で，これは図 8.3 のように振る舞う．S 波はこのエネルギー領域では共鳴を起こさないとすれば，S はエネルギーとともに緩やかに変化する関数である．したがって共鳴の前後での振る舞いは変わらないから，$\cos\theta$ の干渉項は P によって共鳴のところで 0 となり，その前後で符号を変える．図 8.2 (b) から，$\cos\theta$ の干渉項は，確かにそのような振る舞いをしているから，$L=1$ とわかり，Δ の角運動量 J とパリティは $J^P=(3/2)^+$ と決められた．

8.2.5 アーガン図

軌道角運動量の最大値を，$l_{\max} \simeq pR$（πN 散乱のときは $R \simeq 1/\mu_\pi$）ととると，散乱振幅は有限個の部分波振幅で表せる．断面積，偏極度をエネルギーおよび $\cos\theta$ の関数として，データに合うように決めれば，各部分波振幅 f_l は原理的に決定できる．こうして決めた部分波振幅がどのように振る舞うべきかを調べてみよう．非弾性散乱があれば弾性散乱の波は減衰するので弾性率 ($0 \leqq \eta_l \leqq 1$) を定義する．弾性率 η_l は位相のズレに虚数部を導入して得られる ($\eta_l = \exp[-2Im\delta_l]$)．

$$T_l \equiv pf_l = \frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2i} \tag{8.40}$$

を定義すれば，T_l は $\mathrm{Re}\,T_l$（x 軸）$-\mathrm{Im}\,T_l$(y 軸）平面内で，$x=0$, $y=1/2$ を中心として，半径 1/2 の円内になければならない．これはユニタリティ極限の別の表現である．エネルギー＝0 で原点から出発し，引力の場合は，反時計回りに，斥力の場合は時計回りに円周に沿って動く．回転角が 2δ で，中心からの距離が $\eta/2$ で与えられるので，$2\pi, 3\pi$ 散乱のように非弾性チャネルが開けると $\eta_l < 1$ となり，円周からそれてくる（図 8.4）．このような図をアーガン図 (Argand diagram) という．$\delta = \pi/2$ つまり，y 軸を左方向に横切るところが共鳴となる．横切る速度が大きいほど共鳴の幅が狭くなる (8.29)．共鳴付近では T_l は (8.31) の形をとるので，

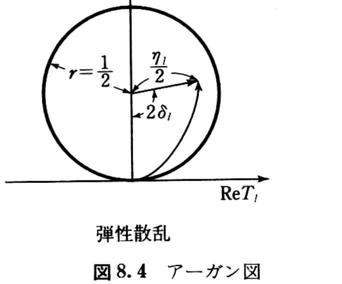
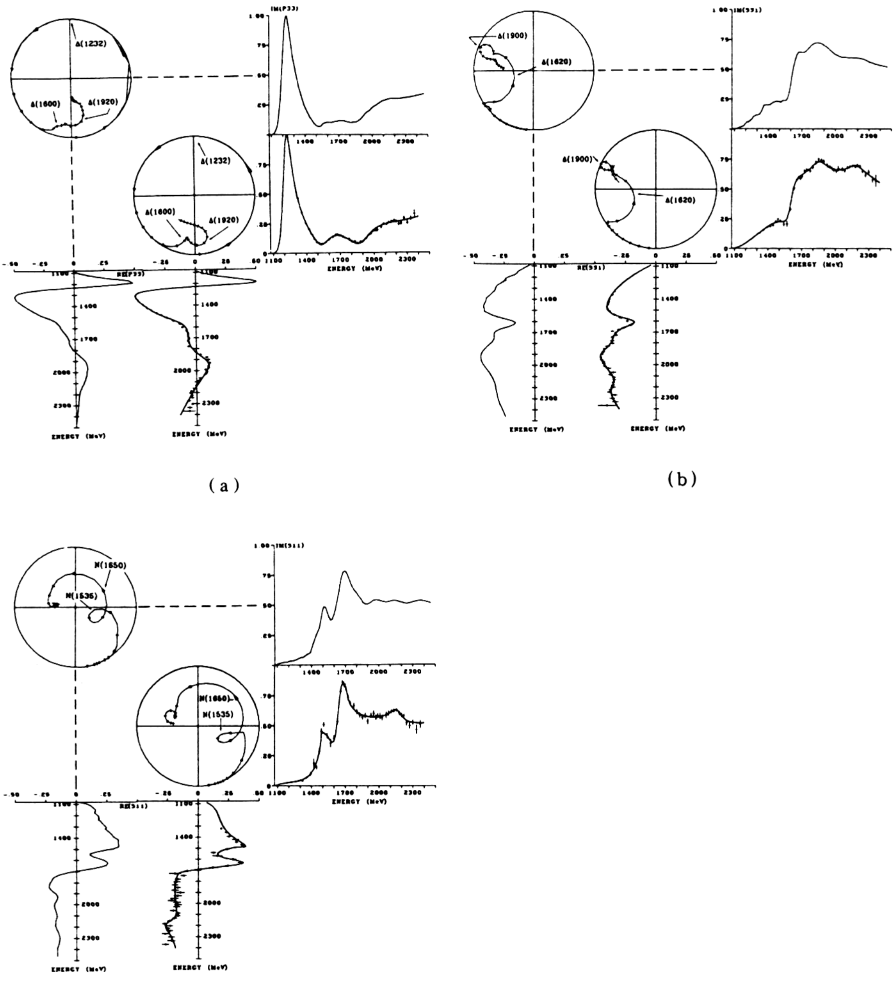


図 8.4 アーガン図

複素散乱振幅 T_l は，半径 1/2 の円内にある（ユニタリティ）．
弾性散乱の場合，エネルギー0 のときは原点にあり，エネルギーが増加するとともに引力の場合反時計回りに，斥力の場合は時計回りに進む．$\delta_l = \pi/2$，すなわち T_l が虚軸を反時計回りに横切るときが共鳴となる．



(a)　　(b)　　(c)

図 8.5　πN 系の部分波解析の例[2)]

(a)　P_{33} ($l=1$,　$I=J=3/2$)

(b)　S_{31} ($l=0$,　$I=3/2$,　$J=1/2$)

(c)　S_{11} ($l=0$,　$I=J=1/2$)

各部分波について二つの独立な解析結果を示し，右側に Im T_l, 下側に Re T_l をプロットしている．

9
クォークモデル

9.1 $SU(3)$ 対称性

核子や π 中間子など，それまでは素粒子と思われていたものが，実はクォークの複合体であると理解されるまでには，何十年にわたる試行錯誤があった．その過程で，当時の理論では理解できない新粒子が出現した時期が2度ほどあった．最初が1940年代後半の今でいうストレンジ粒子の出現であり，2回目が1974年に始まる一連のチャーム粒子発見である．チャーム粒子発見の頃は，ハドロンの分類学がかなり進んでおり，新粒子発見の意義重要性がすぐに理解されたのに反し，ストレンジ粒子の性質は，研究者の追求すべき謎として長い間中心課題であった．振り返ってみれば，ストレンジ粒子の本性を理解したときに事実上クォークモデルの核心に到達していたといってもよい．その過程が緩慢であったがゆえにチャーム粒子のときほどフィーバーは起こらなかったが，物理学の進歩に寄与したという面でははるかに重要であった．

歴史的には，ストレンジ粒子が発見されたことで，内部対称による保存量子数として，それまでのアイソスピンにストレンジネス S が加わり，$m_{\mathrm{p}} \simeq m_{\mathrm{n}} \simeq m_{\Lambda}$ に着目したIOO対称として $SU(3)$ 対称が導入された．そして，オメガ (Ω) 粒子の発見により，$SU(3)$ 対称の信頼性がおおいに高まったことが，クォークモデルを提唱するきっかけとなったのである．この章では，質量，磁気能率などハドロンの静的性質（ハドロンの内部構造などは散乱を使って調べられるので動的性質といい，第12章で考察する）が，クォークモデルでよく再現できることを学ぶ．

8.3 $\rho(770)$

a. 質 量

ρは2個のπの共鳴である．ρには三つの状態があり

$$\rho^+ \to \pi^+ + \pi^0, \quad \rho^0 \to \pi^+ + \pi^-, \quad \rho^- \to \pi^- + \pi^0$$

すなわち，ρのアイソスピンは1である．もし$\pi\pi$散乱が可能ならば，Δと同じ方法でスピンとパリティを決めることができるであろう．πは不安定粒子であり，実用上標的として使えないが，疑似的に$\pi\pi$散乱を起こさせる方法はある．陽子pは，ハイゼンベルグの不確定性原理により，短い時間で

$$\mathrm{p} \longleftrightarrow \mathrm{n} + \pi^+, \qquad \mathrm{p} \longleftrightarrow \mathrm{p} + \pi^0$$

の遷移を繰り返しており，しかもこの遷移は強い相互作用であるので頻繁に起こり，いわば陽子はπの雲に取り囲まれているといってよい．したがって，この雲をねらって，外から別のπを当ててやれば，$\pi\pi$散乱を起こさせることができる．このためにはπが仮想的に自由でいる状態が，$\pi\pi$散乱の起きる衝突時間に比べて十分長い必要がある．図8.7でいえば，過程 (b) の寄与が，(c)，(d) に比べて大きいということである．標的から放出されたπのエネルギー運動量と質量をq^μ, μとすると，πが自由粒子である条件は，$q^2 = q^\mu q_\mu = \mu^2$であるが，$|\boldsymbol{p}_\mathrm{p}| = |\boldsymbol{p}_\mathrm{n}| = p$の系で考えると，陽子と中性子の質量は同じとして

$$\begin{aligned} &E_\mathrm{p} = E_\mathrm{n} \\ &q^2 = (p_\mathrm{p} - p_\mathrm{n})^2 = (E_\mathrm{p} - E_\mathrm{n})^2 - (\boldsymbol{p}_\mathrm{p} - \boldsymbol{p}_\mathrm{n})^2 \\ &\quad = -2p^2(1 - \cos\theta) < 0 \end{aligned} \tag{8.42}$$

は負の量である．つまりπが自由粒子でなく仮想粒子であることの表現であり，自由粒子と仮想粒子の質量差$\delta\mu = \sqrt{(\mu^2 - q^2)}$はどれだけ自由粒子から遠いかという割合を表している．仮想粒子が自由粒子でいられる時間の目安は，ハイゼンベルグの不確定性原理から，$\tau_\mathrm{free} \sim 1/\delta\mu$となる．$\tau_\mathrm{free}$を長くするには，$\delta\mu$したがって$|q^2|$を小さくする必要があるが，それには$\cos\theta \to 1$とすればよい． この条件は， πが陽子から飛び出ているという条件（仮想πの空

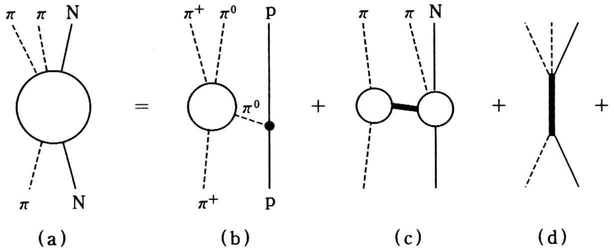


図 8.7 πN → $\pi\pi$N の一般図 (a) と π 交換図 (b), その他の寄与 (c), (d)

間的広がりが，陽子サイズの π のコンプトン波長よりは大きい)

$$|\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}|\simeq\sqrt{2p^2(1-\cos\theta)}<\mu \tag{8.43}$$

を考慮すると，$\tau_{\mathrm{free}}\sim 1/\delta\mu\sim 1/\mu$ となる．一方，衝突時間 τ_{col} は，標的の厚さ ($R\sim 1/\mu$) が入射粒子からみるとローレンツ収縮で薄く見えることを考慮すると，$R/c\gamma\sim(1/\mu)\times(E_{\mathrm{in}}/M)^{-1}$ である．ただし，R は力の到達距離（標的の大きさ)，γ はローレンツ因子で，E_{in} は入射 π のエネルギーである．したがって，$\tau_{\mathrm{col}}\ll\tau_{\mathrm{free}}$ の条件は (8.43) が成立して，かつ

$$E_{\mathrm{in}}\gg M \tag{8.44}$$

であれば満たされるので，この領域は仮想 π 標的に対応すると考えよう*2)．したがって実験条件として，

$$\pi^+ + \mathrm{p} \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 + \mathrm{p} \tag{8.45}$$

のように終状態に 2 個の π を含む反応を十分高エネルギーで行い，かつ標的陽子の反跳角の小さいところを選べば，疑似的には

$$\pi^+ + \pi_{\mathrm{t}} \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 \tag{8.46}$$

反応と見なせる．ここに π_{t} は陽子から放出された π である．

---

*2) 高エネルギー前方散乱 ($s\to\infty$, $|t|\sim 0$) ではレッジェ軌跡交換項が優勢とする考え方（後述§8.5）からすると，ここで交換するのは必ずしも π とは限らない．図 8.7 (b) の π 交換項が優勢であると見なす根拠の一つは，実験的に，前方で

$$\frac{\sigma(\pi^-\mathrm{p}\to\pi^-\pi^+\mathrm{n})}{\sigma(\pi^-\mathrm{p}\to\pi^-\pi^0\mathrm{p})}\simeq 2$$

が成立していることである．アイソスピン独立を仮定すると

$$\frac{\sigma(\pi^-\pi^+\to\pi^-\pi^+)}{\sigma(\pi^-\pi^0\to\pi^-\pi^0)}=1$$

であり，π^+ 交換と π^0 交換では，核子との結合がクレプシュ-ゴルダン係数により $\sqrt{2}$ だけ異なるので，上記の比が期待される．

b. スピン

Δの場合と同じく，入射 π^+ の方向を z 軸にとれば，$J_z=L_z+S_z=0$ であるので，角運動量 J の共鳴では，生成された2個の π のつくる波動関数は，2π の重心系で $Y_{L,0}$ に比例する．ゆえに

$$
\begin{aligned}
I(\theta) &\sim |Y_{0,0}|^2 \sim \text{const.} && J=0\\
&\sim |Y_{1,0}|^2 \sim \cos^2\theta && J=1\\
&\sim |Y_{2,0}|^2 \sim (3\cos^2\theta-1)^2 && J=2 \qquad (8.47)
\end{aligned}
$$

$M_{\pi\pi}{}^2$ の関数として断面積をプロットすると $M_{\pi\pi}{}^2 \simeq M_\rho{}^2$ 付近で大きくなるので共鳴とわかり，その辺での角分布（図8.8[3]）を参照して，$J=1$ と決められた．

パリティは $P_\rho=(P_\pi)^2(-1)^L$ から負と決められる．

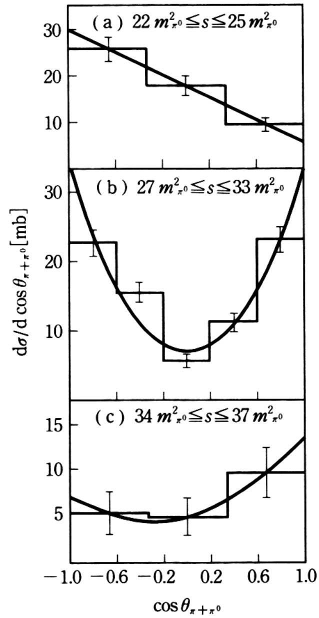


図8.8 $\pi^+p \to \rho^+p \to \pi^+ + \pi^0 + p$ の ρ 重心系での角分布[3]
(a) $640<\sqrt{s}<680$ MeV，(b) $700<\sqrt{s}<780$ MeV，(c) $790<\sqrt{s}<820$ MeV
$\sqrt{s}=M_{\pi\pi}\simeq 740$ MeV で角分布が $\cos^2\theta$ に比例する．
$\theta=90°$ で0にならないのは，非共鳴成分の寄与である．

8.4 多粒子終状態の解析

8.4.1 ダリツプロット

上に述べた ρ の例では,

$$\pi+\mathrm{N}\longrightarrow\pi+\pi+\mathrm{N} \tag{8.48}$$

から $\pi\pi$ 散乱を取り出す方法を述べた．このとき，標的の核子は単に $\pi\pi$ 散乱を抽出するための補助的な役割しか果たさなかった．もっと一般的に終状態多粒子系間の相互作用や共鳴の存在を調べる手段として，任意の粒子の組み合わせの不変質量を組む方法がある．不変質量を組めば，$\pi\pi$ チャネルのみならず πN チャネルの共鳴も同じように調べることができる．ただし行列要素の振る舞いを正確に調べるためには，行列要素が定数である場合の分布，すなわち位相空間の分布を理解しておく必要がある．一般に終状態に n 個の粒子がある散乱の断面積 $\mathrm{d}\sigma$ は（C.4）で与えられる．位相空間とは d LIPS で定義されるローレンツ不変な終状態密度のことである．始状態フラックス因子を除くと

$$\mathrm{d}\sigma \text{ or } \mathrm{d}\Gamma\propto|\langle f|T|i\rangle|^2\mathrm{d\,LIPS} \tag{8.49}$$

$$\mathrm{d\,LIPS}=\frac{1}{m!}(2\pi)^4\delta^4\left(P_i-\sum_k^n p_k\right)\prod_k^n\frac{\mathrm{d}^3p_k}{(2\pi)^3 2E_k} \tag{8.50}$$

ここに P_i は始状態の全エネルギー運動量であり，$m!$ は同一粒子が m 個存在するとき必要な因子である．

(8.48) で示されるような反応のように $n=3$ の例を考えてみる．3 次元運動量 $\boldsymbol{p}_3$ についての積分を実行すると残りの積分は

$$\frac{p_1{}^2p_2{}^2\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}\Omega_1\mathrm{d}\Omega_2}{E_1E_2E_3}\delta(E-E_1-E_2-E_3)$$

に比例する．3 体の重心系で考えれば，$\boldsymbol{p}_3=-(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)$ であるので

$$\begin{aligned}E_1&=\sqrt{\boldsymbol{p}_1{}^2+m_1{}^2},\qquad E_2=\sqrt{\boldsymbol{p}_2{}^2+m_2{}^2}\\E_3&=\sqrt{\boldsymbol{p}_1{}^2+\boldsymbol{p}_2{}^2+m_3{}^2+2|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_2|\cos\xi}\end{aligned} \tag{8.51}$$

が成立する．ξ は $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ とのなす角である．始状態が偏極していなければ座標軸の方向はどう決めてもよいから，$\mathrm{d}\Omega_1$ は積分できて 4π となり，$\mathrm{d}\Omega_2$ は $2\pi\cdot$ $\mathrm{d}\cos\xi$ となる．上記の式を使って変数を $(p_1, p_2, \cos\xi)$ から (E_1, E_2, E_3) に変え

て，ジャコビアンを計算すると，

$$\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\,\mathrm{d}\cos\xi=\frac{E_1E_2E_3}{p_1{}^2p_2{}^2}\mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2\mathrm{d}E_3 \tag{8.52}$$

E_3 についての積分はデルタ関数で消えてしまうので，結局

$$\mathrm{d\,LIPS}\sim\int\frac{\mathrm{d}^3p_1\mathrm{d}^3p_2}{E_1E_2E_3}\delta(E-E_1-E_2-E_3)\propto\mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2 \tag{8.53}$$

となり位相空間は E_1E_2 平面で完全に平坦である．したがって，反応事象の数 $\mathrm{d}N$ は，

$$\mathrm{d}N\sim|\langle f|T|i\rangle|^2\mathrm{d}E_1\mathrm{d}E_2 \tag{8.54}$$

となり，E_1E_2 平面での反応事象の密度は，そのまま行列要素の自乗に比例する．分布範囲は $|\cos\xi|\leqq1$ より決まり，(8.51) を使えば，

$$-1\leqq\frac{E^2-2E(E_1+E_2)+2E_1E_2+m_1{}^2+m_2{}^2-m_3{}^2}{2\sqrt{E_1{}^2-m_1{}^2}\sqrt{E_2{}^2-m_2{}^2}}\leqq1 \tag{8.55}$$

変数として粒子エネルギーではなくて，不変質量を使うと便利なことも多い．粒子 2 と粒子 3 のつくる不変質量 m_{23} は，

$$m_{23}{}^2=(p_2+p_3)^2=(E-E_1)^2-p_1{}^2=E^2-2EE_1+m_1{}^2 \tag{8.56}$$

$$\therefore\quad \mathrm{d}m_{23}{}^2=-2E\mathrm{d}E_1$$

同様に

$$\mathrm{d}m_{31}{}^2=-2E\mathrm{d}E_2$$

であるので，E_1-E_2 平面上の分布はそのまま不変質量 $m_{23}{}^2-m_{31}{}^2$ の分布に比例する．

図8.9に，3 GeV の K ビームを中性子に当て，$\overline{\mathrm{K}}^0\pi^-\mathrm{n}$ 終状態をつくったときの $M^2(\overline{\mathrm{K}}^0\pi^-)$-$M^2(\mathrm{n}\pi^-)$ 平面における反応点の分布を示す[4)]．K*(890) と Δ(1232) に対応するところに，集中して点が分布していることがわかる．$M^2(\overline{\mathrm{K}}^0\pi^-)$ 軸または $M^2(\mathrm{n}\pi^-)$ 軸に投影すると，なだらかな丘状分布（2次元での分布が一様としたときの位相空間の体積に比例する）の上の鋭い山として共鳴が見える．行列要素が定数のときは，分布は位相空間体積に比例する．全体の分布から位相空間体積を差し引いたものが行列要素（の自乗）を表す．それが鋭い山となることは行列要素 $\mathcal{M}$ が

$$\mathcal{M}\propto\frac{1}{(E-E_0)+i\Gamma/2}$$

であることを示し中間状態として共鳴が現れていることを示す．同様に図8.10 (a)～(c) に 4 GeV での $\pi^+ + p \rightarrow n\pi + p$ 反応を，$\pi^+\pi^0$，$\pi^+\pi^-$，$\pi^+\pi^-\pi^0$ の不変質量平面に投影したデータを示す[5]．(a) では，$\rho^+(770)$ が，(b) では

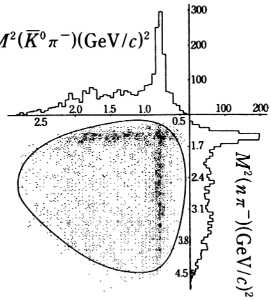


図 8.9 $K^-n \rightarrow K^0\pi^-n$ 反応のダリツプロットと各座標への投影図[4]

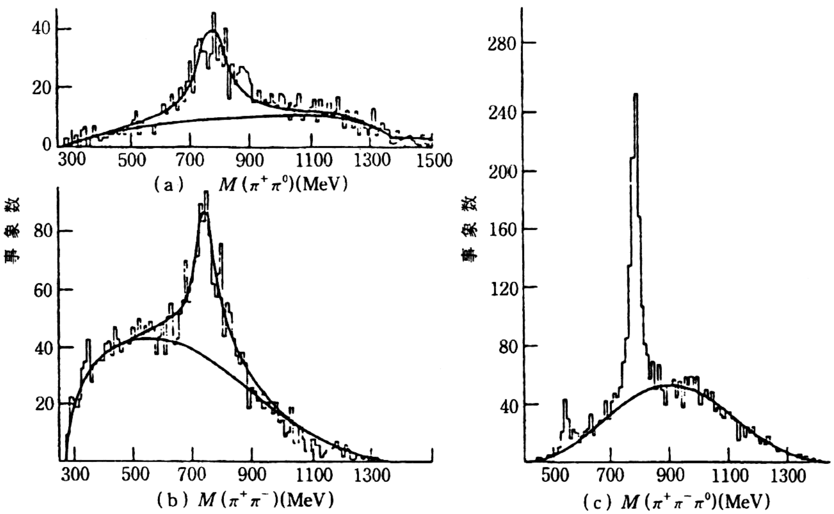


図 8.10 π^+p 反応生成図の不変質量分布[5]

(a) $\pi^+ + p \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 + p$

(b) $\pi^+ + p \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- + p$

(c) $\pi^+ + p \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + p$

横軸は不変質量 (a) $M(\pi^+\pi^0)$, (b) $M(\pi^+\pi^-)$, (c) $M(\pi^+\pi^-\pi^0)$ を MeV 単位で表した．

(a) では ρ^+，(b) では ρ^0，(c) では $\eta(550)$ と $\omega(783)$ が見えている．

ρ^0 (770) が，(c) では η(550) と ω(783) が見える．こうして πN や KN 反応で多粒子を発生し，不変質量分布を見ることによって，1960 年代にたくさんの共鳴が発見された．

8.4.2　K 中間子のスピンとパリティ

$$K^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \tag{8.57}$$

のように，終状態が 3 個の π で質量が同じというように対称性のよい場合，3 個の変数 E_1, E_2, E_3 を対等に扱うと見通しがよくなる．E_1, E_2 の直交軸の代わりに，運動エネルギー：$T=E-m_\pi$ を図 8.11 のように正三角形の内部の点としてプロットする．各点の辺 i からの距離を T_i とすれば，三角形の性質により，

$$T_1+T_2+T_3=\text{const.}=m_K-3m_\pi \equiv Q \tag{8.58}$$

境界は，$|\cos\xi| \leqq 1$ より決まる．$T_i \ll m_\pi$ のときは円になるが，$T_i \gg m_\pi$ のときは点 A, B, C を頂点とする三角形になる．(8.57) の反応 (Q=75 MeV) では，前者に近い．

演習 8.2　図 8.11 のダリツプロットで $T_i \gg m\pi$ のとき，運動エネルギーの分布境界線は，点 A, B, C を頂点とする三角形になることを示せ．

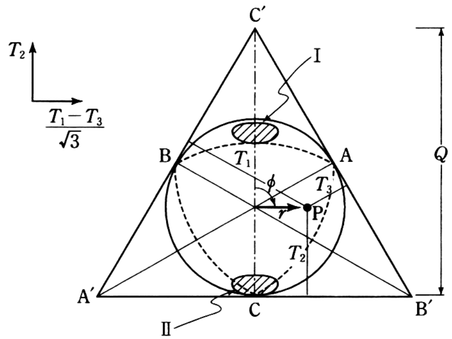


図 8.11　3 体崩壊の対称ダリツプロット
$Q=m_K-3m_\pi$ とすると運動エネルギー $T_1+T_2+T_3=Q$ が成立するので各反応ごとに一点 (P) が対応する．このとき横軸は中心を 0 として，$(T_1-T_3)/\sqrt{3}$ になる．崩壊粒子が非相対論的な場合の境界は円となるが，相対論的効果が入ると点線のように三角に近いいびつな形 (ダッシュ線) となる．極座標 (r, ϕ) で表すこともある．斜線をつけた部分 I，II については本文参照．

境界では π_1 と π_2 は平行か反平行である．線 AA′, BB′, CC′ 付近は，2 個の π が同じエネルギーをもつ領域である．$\pi_1=\pi_3=\pi^+$ とすると，$1\leftrightarrow 3$ の交換で対称であるから，分布は CC′ 軸に関し鏡映対称であり，以下は右半分のみを扱うことにする．$\pi^+\pi^+$ の重心系での軌道角運動量を L_+ とし，その重心に相対的な π^- の軌道角運動量を L_- とすると，K^+ のスピン J は

$$|L_+-L_-|\leqq J\leqq L_++L_- \tag{8.59}$$

L_+ は同一粒子のつくる軌道角運動量であるから，偶数でなければならない．L_+, L_-, J の可能な値を表 8.1 に掲げる．

表 8.1　(L_+, L_-) を与えたときの可能な J^P の値

L_-	$L_+=0$	$L_+=2$
0	0^-	2^-
1	1^+	$1^+, 2^+, 3^+$
2	2^-	$0^-, 1^-, 2^-, 3^-, 4^-$

もし，$J\neq 0$ ならば，L_+, L_- のどちらかは 0 でない．もし仮に $L_+\geqq 2$ であるならば，$\pi^+\pi^+$ が相対的に静止していれば，角運動量障壁（後述）から行列要素は $\simeq 0$ となるであろう．これは，π^- のエネルギーが最大，つまり CC′ と交わる上辺（図 8.11 領域 I）で起こるので，この辺の事象頻度は減少する．同様に $L_->0$ であるならば，π^- が静止する C 点付近（領域 II）での事象が少なくなるであろう．図 8.12 の実験データは，ほぼ一様な分布を示し，どこにも窪みはないから K 中間子のスピンは 0 と結論できる[6]．

3π 終状態（τ モード）のパリティは，$P_\pi{}^3(-1)^{L_++L_-}=-1$ であるが，K^+ には別の $\pi^+\pi^0$（θ モード）崩壊が存在し，こちらはパリティが正である．歴史上はこの τ-θ パズルが，弱い相互作用でのパリティ非保存という重要発見に結びついた．すなわち，弱い相互作用の関与する反応では K のパリティを決められない．K のパリティは，最終的には K のヘリウムによる捕獲反応（強い相互作用）でハイパー核のつくられる反応

$$K^-+He^4\longrightarrow {}_\Lambda H^4+\pi^0 \tag{8.60}$$

によって決められた．ハイパー核とは，原子核中の中性子一つまたは複数個が Λ で置き換わったものをいう．測定の結果，He^4, ${}_\Lambda H^4$ ともに $J=0$ であること

が確立したので，Λの陽子に対する相対パリティを正と定義するとKのパリティは負と決まる．この不定性は強い相互作用ではストレンジネスが保存することによる（§6.3.1「パリティ」の議論参照）．

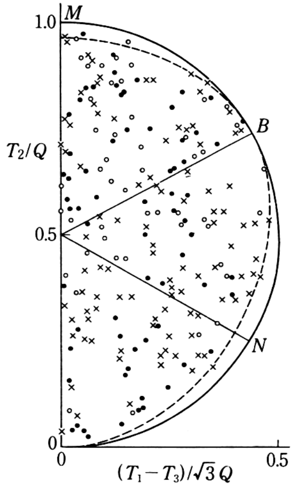


図 8.12　$K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ 崩壊のダリツプロット[6)]
実線が円，ダッシュ線は相対論的効果を入れた境界線．横軸は Q を単位とした $(T_1-T_3)/\sqrt{3}$，縦軸は T_2．

8.4.3　角運動量障壁

力の到達距離 R が有限のとき，古典的に考えると $l > l_{\max} = kR$ の寄与はないはずである．しかし量子力学では，平面波に含まれるすべての部分波の $r < R$ 部分が遷移確率に寄与する．平面波は球面ベッセル関数 j_l を用いて，

$$\mathrm{e}^{ikz} = \sum_{l=0} i^l (2l+1) P_l(\cos\theta) j_l(kr) \tag{8.61}$$

と展開できる．すなわち，平面波の R より中における部分波振幅は中心 $(r=0)$ で正則な解 $j_l(kr)$ に比例する．$j_l(kr)$ は $kr \to 0$ で $\sim (kr)^l$ であるので，$k \ll 1/R$ の低エネルギーでは，平面波の中で力の到達距離に含まれる l 波の散乱振幅への寄与は，$(kR)^l$ に比例する．これは次のようにも考えられる．角運動量をもつと，シュレーディンガー方程式には，遠心力に相当する $l(l+1)/r^2$ が現れる．これを短距離の強い力による $V(r)$ と重ねると図 8.13 のように

なる．古典的にいえば，エネルギーレベルが山の頂よりはるかに下にあり，ポテンシャルの壁に跳ね返されるが，量子力学的には，$r<R$ にある波のしみ出し部分によって，トンネル効果が起こる．しかし，外から入るにも（散乱または吸収）中から出るにも（崩壊）このポテンシャルの障壁に阻まれ，その振幅が $(kR)^l$ に比例するのである．すなわち，崩壊の行列要素は k^l に比例し（したがって崩壊率 $\Gamma\propto k^{2l+1}$），散乱振幅は k^{2l} に比例する．散乱振幅 f_l と δ_l の関係 (8.14) から，$\delta_l\sim kf_l\sim k^{2l+1}$ となる．このように低エネルギー $(k\ll R^{-1})$ では，角運動量が大きい成分は，$(kR)^l$ または，$(kR)^{2l+1}$ に比例し，急速に減少することを角運動量障壁という．

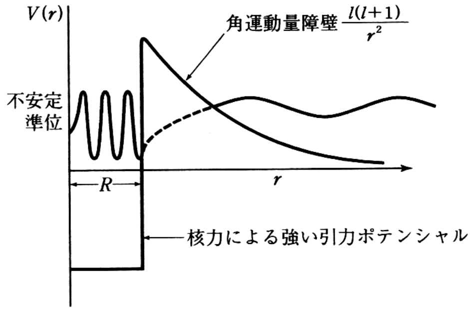


図 8.13　角運動量障壁の模式図

不安定粒子は角運動量障壁と強い力による引力ポテンシャルにより生じた準安定レベルとすると，外に存在する自由波は $(kR)^l$ 分位が $r\lesssim R$ の範囲に入り込む（トンネル効果）．トンネル効果によるしみ出し効果は崩壊振幅で $(kR)^l$ に比例する．散乱の場合は入るときと出るとき両方効くので $(kR)^{2l}$ に比例する．

8.4.4　η のスピンパリティ

η 中間子は，π と重水素 D との反応

$$\pi^+ + \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{p}+\mathrm{p}+\pi^+ + \pi^- + \pi^0 \tag{8.62}$$

の終状態の 3π の不変質量分布で，$m=550$ MeV に山があることから見つけられた[7]．図 8.10 (c) の $\pi^+\mathrm{p}\to\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0\mathrm{p}$ の中の $\pi^+\pi^-\pi^0$ の組み合わせの中にも見えている．3π 崩壊だけでなく

$$\eta \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \qquad 23.6\pm0.6\ \% \tag{8.63 a}$$

$$\eta \longrightarrow 2\gamma \qquad 38.9\pm0.5\ \% \tag{8.63 b}$$

$$\eta \longrightarrow 3\pi^0 \qquad 31.9\pm0.4\ \% \qquad (8.63\,\mathrm{c})$$

$$\eta \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma \qquad 4.88\pm0.15\ \% \qquad (8.63\,\mathrm{d})$$

などの崩壊モードも存在する．2γへの崩壊は明らかに電磁相互作用で起きるが，他の崩壊も分岐比が同程度なので，すべて電磁相互作用で起きると推論できる．2γモードの存在からπ^0と同じくスピンは1ではありえないこと，Cパリティは正であることがいえる．(8.63 a) の両辺にC変換を施すとπ^+とπ^-が入れ替わるので，C変換不変性が成立していれば，$\pi^+\pi^-$の交換で対称となる．すなわちπ^+とπ^-分布の非対称性から，電磁相互作用でのC保存がテストできる[5)]ことはすでに§6.3.2 a「C変換」で述べた．

8.5　高エネルギー弾性散乱と全断面積

8.5.1　黒体球モデル

§8.2で観察したように，低エネルギーのπp散乱ではさまざまの共鳴による山あり谷ありの起伏が見られるが，高エネルギーになるとたくさんの共鳴が重なって滑らかな構造を示すようになる．また非弾性率が大きくなり弾性散乱の全断面積の中に占める割合が小さくなる（図8.14）．πp散乱全断面積は5 GeV以上ではほとんど一定の値をとり，100 GeVを超えるあたりから緩やかに上昇する（図8.15）．この辺の断面積は～25 mbであり，幾何学的な円$\sigma=\pi R^2$で置き換えると，$R=0.9\times10^{-13}$ cmとなり強い相互作用の到達距離をほぼ再現する．

また，図からわかるように$\bar{\mathrm{p}}$pとpp，π^-pとπ^+p，K^-pとK^+pの断面積はそれぞれ等しくなるよう近づいてくる．高エネルギーで粒子と反粒子による断面積が等しくなることは以前から理論的に予想されていて，ポメランチュック (Pomeranchuk) の定理として知られる[8)]．またアイソスピン独立性も成立しているので，$\sigma(\pi^-\mathrm{n})=\sigma(\pi^+\mathrm{p})=\sigma(\pi^-\mathrm{p})$が成立する．

ごく定性的に考えると，非弾性率の大きくなる極限では次に述べるような黒体球モデルが成立するであろう．スピンを無視したときの散乱振幅は

$$f(s,t)=\sum(2l+1)f_l(s)P_l(\cos\theta) \qquad (8.64\,\mathrm{a})$$

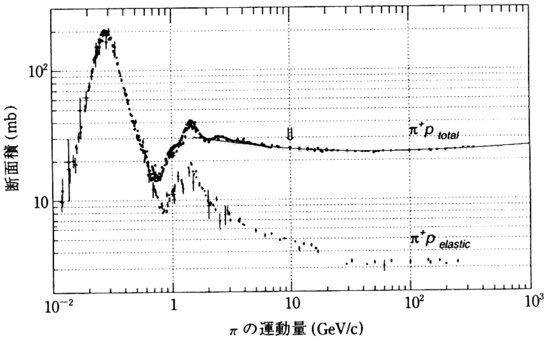


図 8.14　π^+p 散乱の全断面積と弾性散乱断面積の高エネルギーでの振舞い

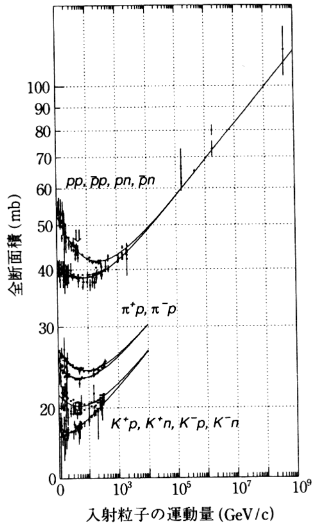


図 8.15　種々の粒子の散乱全断面積の高エネルギーでの振舞い

$$f_l(s)=\frac{\eta_l e^{\delta_l}-1}{2ip} \tag{8.64 b}$$

のように部分波展開できる ((8.5), (8.14)). 吸収がなければ $\eta_l=1$ であり, 完全吸収ならば, $\eta_l=0$ である. 黒体球モデルでは, 力の到達距離を R とした場合半古典的に考えて, $l \leqq l_{\max}=pR$ までは $\eta_l=0$, それ以上の l の部分波は寄与しないとする. このとき, 前方散乱振幅 ($\theta=0$) は, $P_l(1)=1$ を入れて

$$f(s,0)=\frac{i}{2p}\sum_{l=0}^{l_{\max}}(2l+1)\approx\frac{i}{2}pR^2 \tag{8.65}$$

となり, 光学定理 (6.61) を使えば,

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}=\frac{4\pi}{p}\mathrm{Im}\, f(s,0)=2\pi R^2 \tag{8.66}$$

となって, $\sigma\approx$const. という振る舞いを再現し数値もだいたい合う. しかし, 量子力学的に考えると, 力の及ぶ範囲はある R で突然切れるのではなくもっと伸びているはずである. 純粋に解析的な議論からは, $l_{\max}\sim\sqrt{s}\ln s$ がいえて, これからは全断面積の上限は,

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}<\mathrm{const.}(\ln s)^2 \tag{8.67}$$

これを，フロアッサール (Froissart) の上限という[9]．$\sqrt{s}>100$ GeV の超高エネルギー領域では，実際にこの上限が実現されているように見える（図 8.15）．

さらに，高エネルギー弾性散乱の正しい角分布は，簡単な黒体球モデルでは再現できない．小角での角分布を計算するために $\theta\approx 0$ で成立する近似式，

$$t=-4p^2\sin^2\theta/2\approx-(p\theta)^2 \tag{8.68 a}$$

$$P_l(\cos\theta)\approx J_0((l+1/2)\theta) \tag{8.68 b}$$

を使うと，

$$f(s,0)=\frac{i}{2p}\sum_{l=0}^{pR}(2l+1)P_l(\cos\theta) \tag{8.69}$$

$$\approx\frac{i}{2p}\int_0^{pR}2x\,\mathrm{d}x\,J_0(x\theta)\approx\frac{iR}{\theta}J_1(pR\theta)=\frac{ipR}{\sqrt{-t}}J_1(R\sqrt{-t}) \tag{8.70}$$

となる．一方，実験的データは，粒子種によらず

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\approx\left[\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0}\mathrm{e}^{at+bt^2} \tag{8.71}$$

という形によく適合する．a と b は粒子種により異なる定数である．これは，上記の黒体球モデルによる角分布とは異なる．

8.5.2 レッジェ軌跡

上記の角分布を理解するために，もう少し場の理論的思考を取り入れた考察を試みよう．相互作用（散乱）は，一般に粒子の交換により生じる．t チャネルの交換粒子のスピンを J とすると，散乱振幅は

$$f(s,t)\sim\frac{g_J{}^2(-s)^J}{t-m_J{}^2},\qquad s\to\infty \tag{8.72}$$

という形をしていて，s の関数として滑らかであり，$|t|\to$ 大で小さくなる性質をもつ．$g_J{}^2$ は結合定数の積と考えてよい．実際，π 中間子交換モデルが高エネルギー小角非弾性散乱を定性的には再現することが知られていた．この考えを拡張して散乱振幅は種々の粒子交換振幅の和で書けると考える．これらの粒子は，散乱振幅の t 平面において極を与え，考慮対象の t の値に最も近い極の寄与が優勢となる．s チャネル散乱では $t<0$ であり，$t\approx 0$ の小角散乱を考える限り最も小さな質量をもつ粒子，すなわち π メソン交換散乱振幅の寄与

が優勢であるが，一般の散乱ではより質量の大きい粒子交換を取り入れる必要がある．結局，散乱振幅を t チャネルの粒子（および共鳴）の極の和として書く考え方が成立する．

そこで，議論をより一般化し散乱振幅を t チャネルの部分波展開という形で書くことから出発してみよう．この考えは，§5.2.2の交叉対称の議論から出発してもでてくる．具体例として，s チャネルでの πp 弾性散乱を，t チャネルでの $\pi\pi$ 反応として考えよう．ただし，交叉対称が成立するのは，相対論的に不変な振幅であるので，以下は，$A(s,t)=-8\pi\sqrt{s}f(s,t)$ という散乱振幅を考慮の対象にすることとする（(C.12) 参照）．t チャネル散乱振幅の部分波展開式は，

$$A(s,t)=\sum(2l+1)A_l(t)P_l(\cos\theta_t) \tag{8.73 a}$$

$$\cos\theta_t=1+\frac{2s}{t-4\mu^2} \tag{8.73 b}$$

μ は π の質量である．これを πp 散乱に応用するには，$t>4\mu^2$, $s<0$ の領域から $s>0$, $t<0$ の領域へ解析接続すればよいが，$P_l(\cos\theta_t)$ は $\cos\theta_t$ を複素変数としたとき，収束領域は，最も近い特異点に境界が接し，$\cos\theta_t=\pm1$ を焦点とする長円の領域に限られている．この困難を打開するために，レッジェは散乱振幅を複素変数 l の関数と見なした．この場合，散乱振幅をワトソン-ゾンマーフェルト (Watson-Sommerfeld) 変換として知られる

$$A(s,t)=\frac{i}{2}\int_{C_1}\mathrm{d}l(2l+1)A(l,t)\frac{P_l(-\cos\theta_t)}{\sin\pi l} \tag{8.74}$$

という形に書き直すことができる．ここに，積分経路 C_1 は，図8.16 (a) のようにとる．この式は，$1/\sin\pi l$ が，$l=0,\pm1,\pm2\cdots$ に極をもち，かつ留数が $(-1)^l/\pi$ であることを考慮すると (8.73 a) と同等である．ここで，積分経路を変形して図8.16 (b) のようにする．$P_l(\cos\theta_t)$ の性質はよくわかっているので，経路 C_2 が，Re $l>-(1/2)$ に留まっている限りは収束性がよいことが導ける．問題は $A(l,t)$ の振る舞いであるが，レッジェは非相対論ポテンシャル散乱（湯川型の重ね合わせ）については，Re $l>-1/2$ ではたかだか有限個の極の和で書けることを示した．この極のことをレッジェポールという．レッジェポールの寄与を，

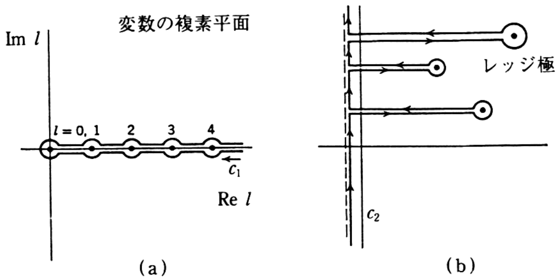


図 8.16　散乱振幅の部分波展開を複素数 l の関数として扱う
(a)　ワトソン-ゾンマーフェルト (Watson-Sommerfeld) 表示での積分経路 C_1
(b)　変形した積分経路 C_2. いくつかのレッジェ極を囲む線とダッシュ線 $\left(\mathrm{Re}\,l=-\frac{1}{2}\right)$ に沿う線よりなる.

$$A(l,t)\sim\frac{\beta_n(t)}{l-\alpha_n(t)} \tag{8.75}$$

と書けば, 式 (8.74) は,

$$\begin{aligned}A(s,t)=&\frac{i}{2}\int_{C_2}\mathrm{d}l(2l+1)A(l,t)\frac{P_l(-\cos\theta_t)}{\sin\pi l}\\&-\pi\sum_n\frac{(2\alpha_n(t)+1)\beta_n(t)}{\sin\pi\alpha_n(t)}P_{\alpha_n}(-\cos\theta_t)\end{aligned} \tag{8.76}$$

と書き換えられる. l, α_n は複素数であるから, この形にすれば, $t<0$, $s>0$ にもっていっても収束性は失われないので, s チャネルへ解析接続が可能である.

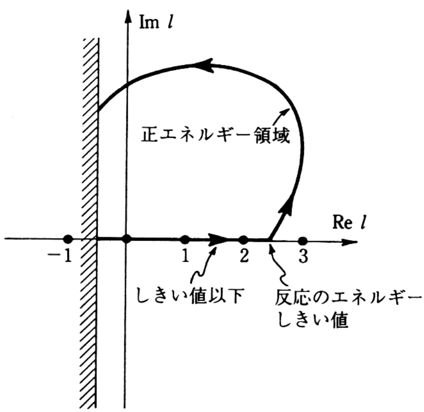


図 8.17　レッジェ軌跡
レッジェ極はエネルギーが変わると複素 l 平面上を動く.

レッジェポールの性質はポテンシャル散乱の場合はよく調べられていて，極の位置 $\alpha_n(t)$ は，t の関数として図 8.17 のように動く．これをレッジェ軌跡 (trajectory) という．Re $l=-1/2$ から出発して実軸上を右に動き，ある t の値 (2 体反応の開けるしきい値，上の例では $t=4\mu^2$) で実軸上から離れて右上がりに進み最終的には方向を転換して Re $l=-1/2$ に戻る．実軸上で極が整数になるところは束縛状態に対応し，しきい値を超えて Re $\alpha_n=l$ (整数) のところは共鳴に対応する．このことをみるには，レッジェポールの部分波への寄与を計算してみればわかる．

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}zP_l(z)P_\alpha(-z)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha-l)(\alpha+l+1)} \tag{8.77 a}$$

という関係式を使えば

$$A_l(t)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\ A(t,\cos\theta)P_l(\cos\theta)$$
$$=\frac{(2\alpha_n+1)\beta_n(t)}{(\alpha_n(t)-l)(\alpha_n(t)+l+1)} \tag{8.77 b}$$

が導ける．もし，レッジェポールの位置が実軸上からそれほど離れていないところにあれば，Re $\alpha_n(t_\mathrm{R})=l$ の近傍で展開すると，

$$A_l\approx\frac{\beta_n(t_\mathrm{R})}{(t-t_\mathrm{r})\left.\dfrac{\mathrm{dRe}\ \alpha_n(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_\mathrm{r}}+i\ \mathrm{Im}\ \alpha_n(t_\mathrm{r})} \tag{8.78}$$

というよく知られた共鳴散乱公式に帰着する．

レッジェ軌跡の実部をエネルギーの関数として描いた図を，チュー-フラウチ (Chew-Frautschi) のプロットと呼ぶ (図 8.18)．ポテンシャル散乱の場合はエネルギーがある程度以上大きくなると，Re l の値はやがて減少するが (図 8.18 (a))，場の理論に適用した場合，現象的にはどこまでも直線的に伸びているようである (図 8.18 (b))．

また，場の理論で扱う場合の注意事項として，交換力を考慮する必要がある．例えば t チャネルが $\pi\pi$ の場合，π のボソンとしての性質およびアイソスピン保存性より $I=1$ の軌跡の場合は $l=$奇数のみが実現される．すなわち一般には，

$$P_{\alpha_n}(\cos\theta)\longrightarrow(1/2)(P_{\alpha_n}(\cos\theta)\pm P_{\alpha_n}(-\cos\theta)) \tag{8.79}$$

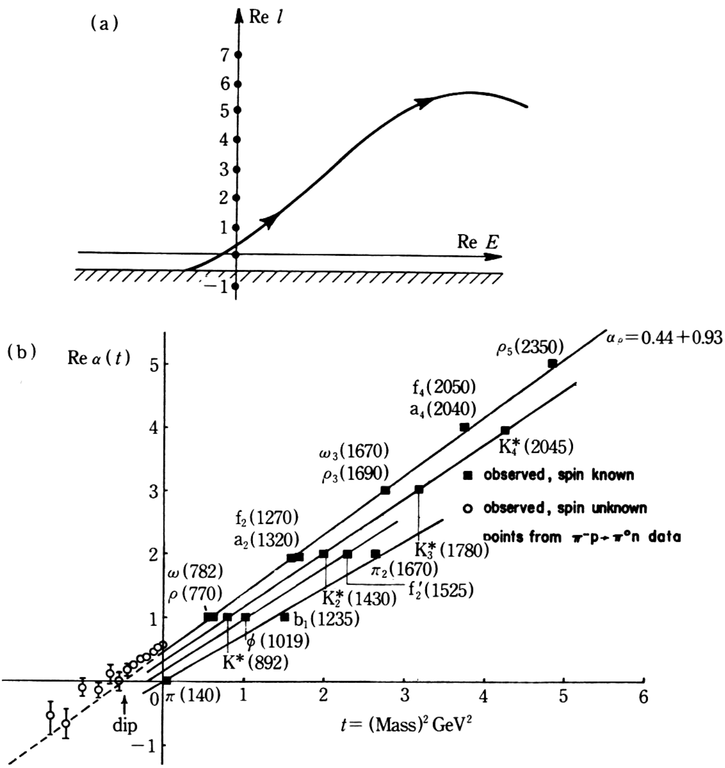


図 8.18　チュー-フラウチ (Chew-Frautschi) のプロット
レッジェ軌跡の Re l をエネルギーの関数として描く.
(a)　ポテンシャル散乱の場合, (b)　相対論的場の理論へ移行した場合. メソン共鳴群を図示した[10]. なお, $\pi^-p\to\pi^0n$ 散乱断面積データから (8.81) を使って得られる点 (○印) は ρ 軌跡の $t<0$ 部分に乗るべき量である.

とする必要がある. ρ_2, ω, ϕ などの 1^{--} 粒子を含むレッジェ軌跡では − 符号をとり, a_2, f_0 などの $2^{++}, 0^{++}$ 粒子を含むレッジェ軌跡では + 符号をとらなければならない. したがって一つのレッジェ軌跡では, $\Delta l=2$ の間隔で共鳴が現れる. パリティ縮退があるときのみ $\Delta l=1$ の間隔で共鳴が現れる.

さて, ここで t チャネル振幅を, $s\to\infty$, $t<0$ に解析接続して, 高エネルギー πp 散乱の振る舞いをみよう. $s\to\infty$ の極限では, $P_l(\cos\theta_t)\to s^l$ であるから, 漸近極限では複素 l 平面で最も右に位置するレッジェポール (チュー-フラウチプロットでは最も上にある軌跡) の寄与が散乱振幅の優勢項となる.

したがって，われわれは離散的 l をもつ粒子交換の代わりに，連続した l の値をもつレッジェ極の交換振幅を議論していることになる．

$$A(s,t)\approx-\pi\sum_n(\alpha_n(t)+1/2)\beta_n(t)\left[\frac{1+\tau e^{-i\pi\alpha_n(t)}}{\sin\pi\alpha_n(t)}\right]P_{\alpha_n}(-\cos\theta_t)$$
$$\longrightarrow\sum_n\left[\frac{s}{s_0}\right]^{\alpha_{n(t)}}\gamma_n(t)\left[\frac{1+\tau e^{-i\pi\alpha_n}}{\sin\pi\alpha_n(t)}\right] \tag{8.80}$$

ここで，s_0 は s と同じ次元をもつパラメターで，$\alpha_n(t)$ は t チャネルでの束縛状態もしくは共鳴を表すレッジェポールを示す．[ ] の中の分子は，(8.79) を一般の α に拡張したもので，$\tau=\pm$ により偶（奇）符号軌跡と呼ばれる．$d\sigma/dt\sim|A(s,t)|^2/s^2$ であるから，

$$\frac{d\sigma}{dt}=\left[\frac{d\sigma}{dt}\right]_{t=0}e^{2(\alpha(t)-1)\ln(s/s_0)} \tag{8.81}$$

$$\left[\frac{d\sigma}{dt}\right]_{t=0}=(1+R^2)\frac{(\sigma_{TOT})^2}{16\pi},\ R=\frac{\mathrm{Re}A}{\mathrm{Im}A} \tag{8.82}$$

$t\approx0$ の付近では，$\alpha(t)\approx\alpha(0)+\alpha' t$ であるから，実験データの示す形 (8.71) を再現できた．

全断面積 $\sigma_{TOT}\sim-\mathrm{Im}\,A(t=0)/s$ が，ほぼ一定になるためには，$A(s,0)\sim s$ でなければいけないから，最も優勢なレッジェ軌跡は，$\alpha_P(0)=1+\varepsilon,\varepsilon\simeq0$ を満たさなければならない．このレッジェ軌跡が真空と同じ量子数をもつものとすれば，粒子と反粒子の散乱断面積は同じ優勢項を共有するので，ポメランチュックの定理が導ける．したがって，この軌跡をポメランチュック軌跡もしくはポメロンと呼ぶ．

$\pi^-p\to\pi^0n$ 荷電交換散乱のような場合は，t チャネルで交換されるレッジェ軌跡は $I=1$ の量子数をもつ．$t=m_\rho$ で，$l=1$ の ρ 共鳴が実現されるので $(\alpha_\rho(m_\rho{}^2)=1)$，$\rho$ 軌跡と呼ばれる．この軌跡は $\alpha_\rho(0)\approx1/2$ を横断し（図 8.18 (b)），断面積は s の関数として $\sim s^{-1}$ のように減少する．

量子数の異なる他のメソン，例えば $\omega(I=0,\ J^P=1^-)$，$K^*(I=1/2,\ J^P=1^-)$ などに対応する軌跡もだいたい同じところを通る．

$s\leftrightarrow u$ の交叉を行えば散乱粒子の一つは反粒子になるが，レッジェ振幅では，$\cos\theta_t\leftrightarrow-\cos\theta_t$ とすることに等しく，(8.80) を参照すれば振幅に τ がかかるだけである．したがって，粒子と反粒子の散乱断面積の差（例えば，

$\sigma(\pi^- p)-\sigma(\pi^+ p)$) をとることにより $\tau=-$ のレッジェ軌跡の寄与を（この場合は ρ 軌跡），和をとることにより $\tau=+$ のレッジェ軌跡の寄与（ポメロンや f_0 軌跡）を分離できる．$\alpha=J$ のときに振幅が (8.72) のような形をとるとすれば，A+B → A+B 散乱におけるレッジェ軌跡 R の留数 γ は，$\gamma\to\gamma_{RAA}\gamma_{RBB}$ のように分解できるであろう (factorization)．ここに γ_{RAA} は軌跡 R と粒子 A との結合定数に比例する量であり，次章で導入する $SU(3)$ 対称性を使って互いに関連付けることができる．こうして少数のレッジェポール振幅をパラメター化して，種々の全断面積を表現することができる．さらに，しきい値以下の t ではレッジェ振幅の位相は

$$S=-\frac{1+\tau e^{-i\pi\alpha(t)}}{\sin\pi\alpha(t)} \tag{8.83}$$

のみによるので，

$$\mathrm{Re}[f(s,0)]=\begin{cases}\tan\dfrac{\pi}{2}\alpha(0)\times\mathrm{Im}[f(s,0)] & \tau=- \quad (8.84\,\mathrm{a})\\ -\mathrm{cotan}\,\dfrac{\pi}{2}\alpha(0)\times\mathrm{Im}[f(s,0)] & \tau=+ \quad (8.84\,\mathrm{b})\end{cases}$$

が成立し，全断面積データから得られたパラメターを使って，前方散乱振幅の実数部を予言することができる．実数部にはポメロン以外の軌跡が寄与し，ポメロン以外の優勢項の f_0 や ρ の軌跡の $\alpha(0)\simeq 1/2$ であるから，高エネルギーでは実数部は $s^{-0.5}$ のように小さくなることが予想される．実験的には，(8.82) を使うかまたはクーロン散乱との干渉を測定して実数部を決めることができ，予想を裏付けている[11]．

現象論的には，高エネルギー散乱断面積の振る舞いは，ρ 軌跡に ω，f もしくは a 軌跡などを一つの等価レッジェ軌跡 (Reggeon と呼ぶ) の交換項のみを考えるのみで，そして弾性散乱はこれにポメロン交換項を付け加えるのみですべての反応をほぼ再現できる[2]．この場合，全断面積は

$$\sigma_{\mathrm{TOT}}=\mathrm{X}s^{\varepsilon}+\mathrm{Y}s^{-\eta} \tag{8.85 a}$$

$$\mathrm{X(ab)}=\mathrm{X}(\bar{\mathrm{a}}\mathrm{b}) \tag{8.85 b}$$

という形の関数で十分データを再現させることができる．第 1 項がポメロン交換項で第 2 項がレッジェオン交換項である．X と Y は反応ごとに異なる値をとるが，ε と η は，

$$\varepsilon=\alpha_P(0)-1=0.0790\pm0.0011 \tag{8.86 a}$$

$$\eta=1-\alpha_R(0)=0.4678\pm0.0059 \tag{8.86 b}$$

という共通の値でよい．

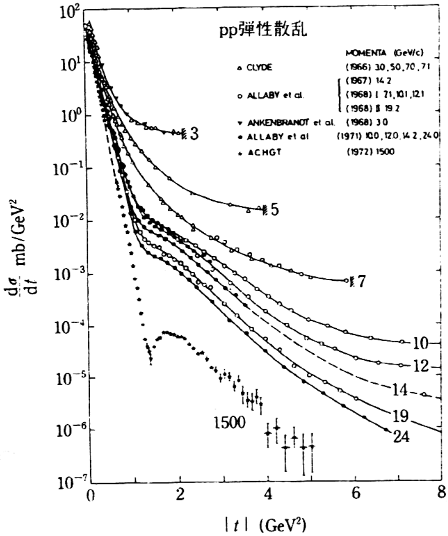


図 8.19 pp 弾性散乱微分断面積を運動量遷移の自乗の関数として，入射陽子運動量のいろいろな値についてプロットしたもの[12)]
エネルギーが高くなるにつれ回折散乱によるピークが現れ，かつそのピーク幅が縮んでゆく様子が見える．

(8.81) によれば指数の肩にある t の係数は s とともに大きくなる．すなわち，散乱の前方ピークの幅は s が大きくなるとともに縮むことになる．pp 弾性散乱ではこの傾向が見られるが (図 8.19[12)]参照)，他のすべての実験データにはこの傾向がみられるとは限らないので，角分布に関してはまだ s が十分大きくなく漸近領域に達していないか，1～2 個のレッジェ軌跡が優勢であるという単純な式では近似が悪いということを意味する．結局，レッジェモデルは考え方として非常に魅力があり，高エネルギーでの散乱断面積の漸近形などを問題にするときはよく採用される．現代的な QCD 解釈によれば，ポメロン軌跡は特定の共鳴によるものではなく，多数のグルーオンの複合的振る舞いによると考えられている．

レッジェ軌跡による表式では，低エネルギーの t チャネルの共鳴散乱振幅が同時に s チャネルの高エネルギー部分を表す．逆も真であるので各チャネルの散乱振幅には 2 重性 (duality) がある．この考えを拡張すると，各交叉チャネルの散乱振幅は s, t, u チャネルの共鳴群の和ですべて表せることになる (ヴェネチアーノモデル[13])．一つの散乱振幅が組み替えにより s チャネル振幅とも t チャネル振幅ともみなせるこの 2 重性は，粒子の紐モデルへと発展する重要な契機となった．この意味でレッジェ軌跡による解析は，歴史上の重要な展開点の一つになっている．

参考文献

1) Ashkin *et al.*: *Phys. Rev.*, **101** (1956) 1149
　Mukhin *et al.*: *Sov. Phys JETP*, **4** (1957) 237
2) PDG; Review of Particle Properties, *Phys. Lett.*, **239** (1990), *Phys. Rev.*, **D54** (1996)
3) D. Duane Carmony *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, 8 (1962) 73
4) Bakker *et al.*: *Nucl. Phys.*, **B16** (1970) 53
5) C. Alff *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **9** (1962) 325
6) Orear *et al.*: *Phys. Rev.*, **102** (1956) 1675
7) A. Pevsner *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **1** (1961) 421
8) I. Ya. Pomeranchuk: *Soviet Phys. JETP*, **3** (1956) 306
　L.B. Okun and I. Ya. Pomeranchuk: *Soviet Phys. JETP*, **3** (1956) 307
9) M. Froissart: *Phys. Rev.*, **123** (1961) 1053
10) C. B. Chiu: *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **22** (1972) 255
11) V. Barger and M. Olsson: *Phys. Rev.*, **146** (1966) 108.
　V. Barger, M. Olsson and D.D. Reeder: *Nucl. Phys.*, **85** (1968) 411
12) K. Goulianos: *Phys. Rep.*, **C101** (1983) 169
13) G. Veneziano: *Nuovo Cimento*, **57** (1968) 190

9
クォークモデル

9.1 $SU(3)$ 対称性

核子やπ中間子など，それまでは素粒子と思われていたものが，実はクォークの複合体であると理解されるまでには，何十年にわたる試行錯誤があった．その過程で，当時の理論では理解できない新粒子が出現した時期が2度ほどあった．最初が1940年代後半の今でいうストレンジ粒子の出現であり，2回目が1974年に始まる一連のチャーム粒子発見である．チャーム粒子発見の頃は，ハドロンの分類学がかなり進んでおり，新粒子発見の意義重要性がすぐに理解されたのに反し，ストレンジ粒子の性質は，研究者の追求すべき謎として長い間中心課題であった．振り返ってみれば，ストレンジ粒子の本性を理解したときに事実上クォークモデルの核心に到達していたといってもよい．その過程が緩慢であったがゆえにチャーム粒子のときほどフィーバーは起こらなかったが，物理学の進歩に寄与したという面でははるかに重要であった．

歴史的には，ストレンジ粒子が発見されたことで，内部対称による保存量子数として，それまでのアイソスピンにストレンジネスSが加わり，$m_{\rm p} \simeq m_{\rm n} \simeq m_\Lambda$に着目したIOO対称として$SU(3)$対称が導入された．そして，オメガ($\Omega$)粒子の発見により，$SU(3)$対称の信頼性がおおいに高まったことが，クォークモデルを提唱するきっかけとなったのである．この章では，質量，磁気能率などハドロンの静的性質（ハドロンの内部構造などは散乱を使って調べられるので動的性質といい，第12章で考察する）が，クォークモデルでよく再現できることを学ぶ．

9.1.1　ストレンジ粒子の発見

1940年頃，宇宙線の起こす反応を霧箱で観察していたロチェスター (G.D. Rochester) とバトラー (C.C. Butler)[1] は，V字型の軌跡を残す奇妙な粒子を見つけた (図9.1).

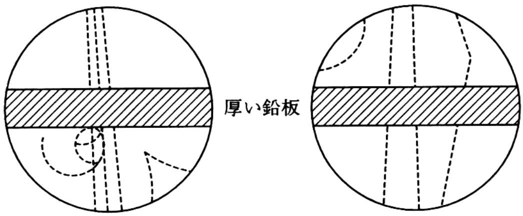


図9.1　ウィルソン霧箱内での宇宙線による新粒子生成反応
たくさんの貫通シャワーの中にキンク (折れ曲がり) とV字型飛跡がある.

ある種のV粒子は中性で π^- とpとか π^- と π^+ に崩壊し (図9.1 (a)),

$$V_1 \longrightarrow \pi^- + p \qquad (9.1\,a)$$

$$V_2 \longrightarrow \pi^- + \pi^+ \qquad (9.1\,b)$$

$$V_3 \longrightarrow \pi^- + n \qquad (9.1\,c)$$

$$V_4 \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 \qquad (9.1\,d)$$

別の種類のV粒子は電荷をもち，π^- とnとか，$\pi^\pm$ と π^0 に崩壊した (図9.1 (b)). 同じ新粒子でも，π 中間子発見のときは理論が先行しており発見が待たれていたのに反し，V粒子の存在や必要性は理論家は誰も予想していなかった．ということはこの新粒子のもつ性質が当時の理論家には理解できなかったのである．何よりのパズルは，霧箱の中で頻繁につくられるのに，目に見えるくらいの軌跡を残すというその崩壊の遅さであった．生成反応の速さと崩壊の遅さという2重性は，チャーム粒子のときも問題にされた大きな特徴である (ただしチャームのときは崩壊時間ではなく共鳴幅の狭さであったが). 生成反応が頻繁に起きるということは，反応が強い相互作用で起きることを意味する．生成に強い相互作用が働くのならば，同じ強い力が作用して崩壊時間は 10^{-24}～10^{-22} 秒くらいとなり軌跡を残せるほど飛べないはずである．人間の裸眼に見えるくらいの軌跡を残すということは，崩壊時間が 10^{-10}～10^{-8} 秒く

らいであり，これは弱い相互作用による過程でなければならない．同じ粒子でありながら，あるときは強い相互作用をし，あるときは弱い相互作用するという 2 重性が長い間研究者の頭を悩ませたのである．そのうち，V 粒子は必ず他の V 粒子とともに生成することが実験的にわかってきた．そして，西島とゲルマン (M. Gell-Mann) により独立に提案されたストレンジネス (strangeness；奇妙さ) という新しい量子数を導入し，ストレンジネスは強い相互作用では保存するが，弱い相互作用では保存しなくてもよいとすれば，この 2 重性が説明できることがわかった．

例えば，(9.1) の V_1, V_2 は，Λ, K^0 と名付け，それぞれストレンジネス $S=-1$ および $+1$ をもつと定義しよう．π や p の既知の粒子は $S=0$ をもつとすれば，生成反応は，

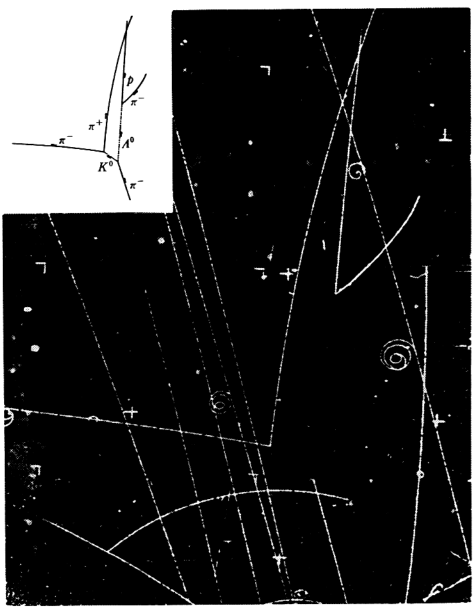


図 9.2　ローレンス・バークレー研究所 (LBL) の 6 GeV 陽子加速器ベヴァトロンによる泡箱写真 (LBL 提供)

$\pi^- + \mathrm{p} \longrightarrow K^0 + \Lambda^0$

$\Lambda^0 \longrightarrow \pi^- + \mathrm{p}$

$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$

$$\begin{array}{lllll} & \pi^- + \mathrm{p} \longrightarrow & \mathrm{K}^0 + \Lambda \\ S; & 0 \quad 0 & +1 \quad -1 \end{array} \tag{9.2}$$

のように反応の前後でストレンジネスを保存する．一方，崩壊では

$$\begin{array}{ll} & \Lambda \longrightarrow \pi^- + \mathrm{p} \\ S; & -1 \qquad 0 \quad 0 \end{array} \tag{9.3 a}$$

$$\begin{array}{ll} & \mathrm{K}^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- \\ S; & +1 \qquad 0 \quad 0 \end{array} \tag{9.3 b}$$

のようにストレンジネスを保存しないので強い相互作用が働かず弱い相互作用の反応になる．ローレンス・バークレー研究所（通称 LBL ; Lawrence Berkeley Laboratory）のベヴァトロンの泡箱写真（図 9.2）で眺めると様子がよくわかる．同じようにして V_3 は Σ^-, V_4 は K^+ と名付け，

$$\pi^- + \mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{K}^+ + \Sigma^- \tag{9.4}$$

でつくられる．面白いことにこれらのストレンジ粒子は，電荷のみ違い質量がほとんど同じの仲間をもつ．つまりアイソスピン多重項を構成することも実験で示されたのである．西島-ゲルマンは，さらに一歩踏み込んで，電荷 Q（陽子の電荷を 1 と定義する），アイソスピンの第 3 成分 I_3, ストレンジネス S とバリオン数 B との間には次の関係式が成立することをも見いだした（西島-ゲルマンの法則）．

$$Q = I_3 + (B+S)/2 \equiv I_3 + Y/2 \tag{9.5}$$

$$Y = B + S$$

Y は，超電荷またはハイパーチャージ（hypercharge）と呼ばれる量である．表 9.1 を参照すれば，(9.5) はこの表の中のすべての粒子について成り立って

表 9.1　代表的な粒子のもつ量子数

B（バリオン数）	0	0	1
J^P	0^-	1^-	$(1/2)^+$
$S=1$	$(\mathrm{K}^+, \mathrm{K}^0)$	$(\mathrm{K}^{*+}, \mathrm{K}^{*0})$	
$S=0$	(π^+, π^0, π^-), η, η'	(ρ^+, ρ^0, ρ^-) ω, ϕ	(p, n)
$S=-1$	$(\overline{\mathrm{K}}^0, \mathrm{K}^-)$,	$(\overline{\mathrm{K}}^{*0}, \mathrm{K}^{*-})$	$(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$, Λ
$S=-2$			(Ξ^0, Ξ^-)

いることがわかる．$B=0$ の仲間を中間子（メソン），$B=1$ の仲間をバリオン，$B=1$, $S\neq 0$ の粒子をハイペロンと呼ぶ．現在発見されている数百種に及ぶハドロンの仲間は，すべてこの西島-ゲルマンの法則を満たす．

1960 年代に入ってからは，米国のブルックヘブン研究所のコスモトロン（3 GeV），バークレー研究所のベヴァトロン（6 GeV）が稼働を始め，KN 散乱の系統的研究，多重粒子発生の中の KN, KKN, πY, KY（Y はハイペロン）系の泡箱による系統的研究などで，$S=0, -1, -2$ などの共鳴の存在とその性質などがわかってきた．一部は第 8 章「ハドロンスペクトロスコピー」ですでに述べた通りである（図 8.9，図 8.10 など）．これによって数百種に及ぶハドロン群の存在が明らかになったが，これだけたくさんあるとハドロンが素粒子であるとは考えにくい．むしろ複合粒子と見る方が自然であろう．複合粒子と見なした場合，基本となるべき粒子の満たすべき性質は何であろうか？

9.1.2 坂田モデル

ハドロンのスピン s，アイソスピン I は，0, 1/2, 1, 3/2, … とたくさんあり，これらを再現するためには，少なくも，$s=1/2$, $I=1/2$ をもつ粒子が最低限 2 個必要である．また 2 個あれば，合成によってあらゆる組み合わせを再現できる．既出のフェルミ-ヤンモデルはこの考えに基づいている．しかし，これでは，ストレンジネス S をもつ粒子は再現できないので，ストレンジネスをもつ第 3 の基本粒子が必要である．そこで，これらの性質を満たすように，陽子 (p)，中性子 (n)，Λ を 3 個の基本粒子とするのが坂田モデルである[*1),2)]．さらに池田，大貫，小川[3)]は，$m_{\mathrm{p}}\simeq m_{\mathrm{n}}\simeq m_{\Lambda}$ に注目し，強い相互作用は，$\mathrm{p}\leftrightarrow\mathrm{n}\leftrightarrow\Lambda\leftrightarrow\mathrm{p}$ の入れ換えで変わらないとした（IOO 対称）．これは，$SU(3)$ 対称性の導入である．しかし，$SU(3)$ は，$SU(2)$ のアイソスピンが近似的対称性であった以上に近似が悪い．Λ と核子の質量は約 20% の差があり，この程度の誤差で，$SU(3)$ 対称は破れていると考えられる．

$SU(3)$ 群の基底ベクトル ψ を，

*1) スピン，アイソスピン，ストレンジネスだけを再現するのならば，第 3 の基本粒子のスピン，アイソスピンは，何であってもかまわない．例えば，3 個の基本粒子として (p, n, K^+) を考えても既存の量子数を再現することはできる．

$$\psi=\begin{bmatrix}p\\n\\\Lambda\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\xi^1\\\xi^2\\\xi^3\end{bmatrix}=\xi^i e_i,\quad e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{9.6}$$

のように列ベクトルで表すことにする．p, n, Λ は，それぞれ $(I_3, S)=(1/2, 0)$, $(-1/2, 0)$, $(0, -1)$ をもつ．3 次元表現であるので，この組を **3** と表そう．反粒子は，行ベクトル $\psi^\dagger=(\bar{p}, \bar{n}, \bar{\Lambda})\equiv(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を使って表すことにする．反粒子の $(I_3, S)=(-1/2, 0)$, $(1/2, 0)$, $(0, 1)$ であり，**3** とは違う量子数をもつので違う表現に属する．これを $\mathbf{3}^*$ と表そう[*2)]．U を 3×3 のユニタリー，ユニモジュラー ($\det U=1$) の複素行列とすると，$3^2-1=8$ 個の独立な無軌跡 (traceless) のエルミート行列 λ_i によって，$SU(3)$ 変換群の任意の行列は，実数 θ_i を用いて

$$U=\exp\left(-\frac{i}{2}\sum_i^8\lambda_i\theta_i\right) \tag{9.7 a}$$

$$\mathrm{Tr}(\lambda_i)=0 \tag{9.7 b}$$

のように表される．このとき，ベクトルの変換式は

$$\xi^i \longrightarrow \xi'^i=\sum_j U^i{}_j\xi^j=U^i{}_j\xi^j,\qquad \xi_i \longrightarrow \xi'_i=\sum_j U^{*i}{}_j\xi_j=\xi_j U^{\dagger j}{}_i \tag{9.8}$$

である (λ_i については付録 F 参照)．

9.1.3　メソン 8 重項 (octet)

バリオンと反バリオンの合成系はバリオン数 0 であるのでメソンとなる．$SU(3)$ 変換で,

$$\psi \longrightarrow \psi'=U\psi,\qquad \psi^\dagger \longrightarrow \psi^{\dagger\prime}=\psi^\dagger U^\dagger \tag{9.9}$$

であるので，$\psi^\dagger\psi=\xi_i\xi^i=\bar{p}p+\bar{n}n+\bar{\Lambda}\Lambda$ は，$SU(3)$ 変換で不変である．

$$\therefore\quad \eta'\equiv(\bar{p}p+\bar{n}n+\bar{\Lambda}\Lambda)/\sqrt{3} \tag{9.10}$$

は，$SU(3)$ 群の既約表現に属する基底ベクトルであり，1 重項 (singlet) をつくる．$\Phi^i{}_j=\xi^i\xi_j$ からつくれる残りの 8 個の要素，$P^i{}_j=\xi^i\xi_j-(1/3)\mathrm{Tr}(\Phi^i{}_j)$ は 3×3 行列の行列要素で表すと,

---

*2) $SU(2)$ の場合は，反粒子多重項の $SU(2)$ 量子数（アイソスピン）が粒子多重項と同じであるので，適当な変換 $(\bar{p}, \bar{n})\to(\bar{n}, -\bar{p})$ によって同じ表現に属するようにできた．すなわち $\mathbf{2}^*=\mathbf{2}$

$$P^i{}_j=\begin{bmatrix} \dfrac{2\bar{p}p-\bar{n}n-\bar{\Lambda}\Lambda}{3} & \bar{n}p & \bar{\Lambda}p \\ \bar{p}n & \dfrac{2\bar{n}n-\bar{\Lambda}\Lambda-\bar{p}p}{3} & \bar{\Lambda}n \\ \bar{p}\Lambda & \bar{n}\Lambda & \dfrac{2\bar{\Lambda}\Lambda-\bar{p}p-\bar{n}n}{3} \end{bmatrix} \tag{9.11}$$

8個の独立な基底ベクトル $P^i{}_j$ は $SU(3)$ 変換により互いに混合するので，既約表現8重項 (octet) をつくる．これを，

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}^*=\mathbf{1}\oplus\mathbf{8} \tag{9.12}$$

のように表す．これは，$SU(2)$ 群で，アイソスピン 1/2 と 1/2 を足すと，$I=0$ の1重項と，$I=1$ の3重項に分けることのできたことの $SU(3)$ への拡張である．ここの表記に従えば，$SU(2)$ では，$\mathbf{2}\otimes\mathbf{2}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{3}$ と表される．8重項のメンバーは，$\xi^i\xi_j$ の量子数を参照することによって，スピン0の粒子群には

$$\pi^-=-\xi^2\xi_1,\quad \pi^+=\xi^1\xi_2,\quad K^-=\xi^3\xi_1,\quad K^+=\xi^1\xi_3,\quad \bar{K}^0=-\xi^3\xi_2,\quad K^0=\xi^2\xi_3,$$
$$\pi^0=-(\xi_1\xi^1-\xi_2\xi^2)/\sqrt{2},\quad \eta=(\xi_1\xi^1+\xi_2\xi^2-2\xi_3\xi^3)/\sqrt{6} \tag{9.13}$$

のように対応が付けられる．$\pi^0, \pi^-, \bar{K}^0$ の負号は $(\bar{n}, -\bar{p})$ がアイソスピン2重項であること（脚注2*参照）を反映している．中性メンバーの組み合わせのつくり方は一意的ではないが，アイソスピンがよい量子数であることを考え，π^+ から，I_- 演算（$p\to n$，および $\bar{n}\to -\bar{p}$ とした組み合わせのすべての和をとることに相当）によって π^0 をつくり，次に π^0 と η' の両方に直交するように η をつくる．(9.13) を使うと，(9.11) は，

$$P^i{}_j=\begin{bmatrix} \dfrac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\dfrac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ -\pi^- & -\dfrac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\dfrac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & -\bar{K}^0 & -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\eta \end{bmatrix} \tag{9.14}$$

と書ける．8重項を，I_3, Y の平面上の点として表現すると図9.3 (a) のようになる．このような図をルート図と呼ぶ．これは実際観測されている粒子のスペクトルを再現する（ただし，η, η' は当時発見されていなかった）．スピン1のメンバーのときは，$\pi\to\rho$, $K\to K^*$, $\eta, \eta'\to\omega, \phi$ とすればよい（図9.3

(b))．このように，坂田モデルは $SU(3)$ という数学的準備を完了し，メソン8重項の存在まで予言しながら，p, n, Λ を基本粒子としたがために，バリオンもまた8重項をつくるという実験事実（図9.4 (b)）には目をつぶってしまった．これから先はクォークモデルがとって替わる．

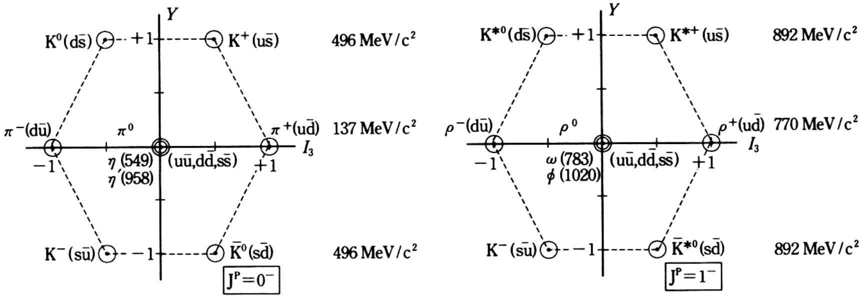


図 9.3　(u, d, s) と (ū, d̄, s̄) からつくられるメソン1重項と8重項を合わせた9重項
(a)　観測されている 0^+ メソンとクォークの組み合わせの対応
(b)　観測されている 1^- メソンとクォークの組み合わせの対応

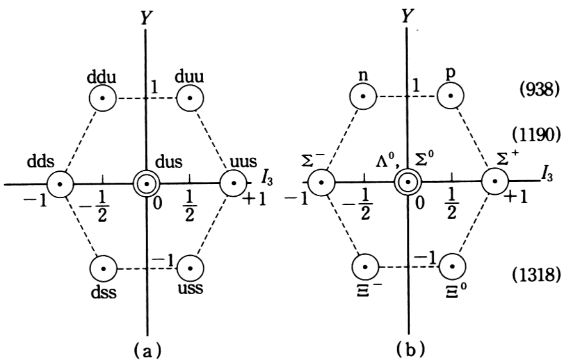


図 9.4　バリオン $1/2^+$ 8重項の (a) クォーク組み合わせと
(b) 観測されている粒子を示す．

9.1.4　クォークモデル

ゲルマン (M. Gell-Mann)[4] とネーマン (Y. Nêeman)[5] は，$(1/2)^+$ のバリオンもまた8重項をつくるという実験事実に着目し，8重項を基本とする8正道説 (eightfold way) を唱えた．この場合ストレンジネス S でなく，ハイパー

チャージ（超電荷）$Y=S+B$ を，I_3 と並ぶ量子数とすると，メソンとバリオンの 8 重項を統一的に記述できる（I_3-S 平面では，メソン 8 重項とバリオン 8 重項が，S の 1 単位分だけずれる）．しかし，8 正道説は，実験事実を表面的には説明できるものの，なぜそうかという必然性に乏しい．そこで改めて，坂田モデルの基本理念すなわち物質は階層構造をつくるという視点に立てば，バリオン $(1/2)^+$ やメソン 0^- を構成できるような基本粒子がなければならない．中間子多重項 8 は，$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}^*$ からつくられるので，基本粒子は $\mathbf{3}$ に属すると考えるのが自然である．これは坂田モデルでも同じであるが (p, n, Λ) とは違うので (u, d, s) と表し，まとめてクォークと呼ぶことにする．u, d, s がバリオン数をもっているとすれば，$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}^*$ はバリオン数をもたない．したがって，バリオンの 8 を実現するには別の組み合わせを考える必要がある．$\mathbf{3}$ を三つ重ねると 8 が出現するので（後述 (9.20)），これをバリオンと考えると，バリオンはクォーク 3 個より構成されることがわかる．これを認めればクォークはバリオン数 1/3 をもたねばならない．ここで基本粒子たるクォークの性質は坂田モデルを踏襲し，かつ西島-ゲルマンの法則

$$Q=I_3+\frac{B+S}{2}=I_3+\frac{Y}{2} \tag{9.15}$$

に合うように量子数を決めると，表 9.2 のようになる．

表 9.2 クォークの量子数

クォーク名	スピン	I_3	S	B	Y	Q
u（アップ）	1/2	1/2	0	1/3	1/3	2/3
d（ダウン）	1/2	−1/2	0	1/3	1/3	−1/3
s（ストレンジ）	1/2	0	−1	1/3	−2/3	−1/3

表 9.2 によれば，クォークは電荷 2/3，または −1/3 という半端な値をとることになる．これは当時としてはかなり常識をはずれた考え方であり，提案者のゲルマン[6] ですら当初はクォークを実在の粒子とは考えず単なる数学的手段であるといっていたほどである．クォークモデルのもう一人の提案者ツヴァイク[7] は，実在の粒子と考えたという．

現代の定説によれば，強い力はすべてのクォークが等しくもつカラーにより

生じ，クォークの種類にはよらないことがわかっている．$m_u \sim m_d \sim m_p/3 \sim 330$ MeV，$m_s \sim m_u + (m_\Lambda - m_p) \sim 500$ MeV と計算できるので（後述，ハドロンの質量公式），アイソスピン（$SU(2)$）や，$SU(3)$ 対称は，クォークの質量がたまたま同じくらいの値をもつという偶然性に由来することが明らかである．しかし，歴史的には，ハドロンのクォーク構造に到達する上で，この u, d, s の入れ換えによる $SU(3)$ 対称は大きな役割を果たしたのであった．u, d, s などの名前により区別されるクォークの種類を香り（flavor）と呼ぶ．そこで上記の $SU(3)$ 対称を特に香りの $SU(3)$ と呼び，$SU(3)_{\rm flavor}$ のように書くこともある．

9.1.5　バリオン多重項

メソン 8 重項のつくり方は，p → u, n → d, Λ → s の置き換えをすれば，坂田モデルと全く同一である．バリオンをつくるためにまずクォーク 2 個より成る 9 個の積ベクトル $T^{ij} = \xi^i \xi^j$ の変換性をみてみよう．これは一般に既約ではない．しかし，

$$T^{ij} = \frac{1}{2}(\xi^i \xi^j - \xi^j \xi^j) + \frac{1}{2}(\xi^i \xi^j + \xi^j \xi^i) = A^{ij} + S^{ij} \tag{9.16}$$

のように，対称な部分と反対称な部分に分けることができる．対称性は変換により変わらないから（演習 9.1），9 個の積ベクトル T^{ij} が，3 個の反対称な表現と 6 個の対称な表現に分解できたことになる．すなわち

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{3}^* \oplus \mathbf{6} \tag{9.17}$$

3 個の A^{ij} が，**3** でなく $\mathbf{3}^*$ に属することは，$\xi^i \xi^j$ のつくる量子数 (I_3, Y) をみれば一目瞭然である．あるいは $\eta_k = \varepsilon_{ijk} \xi^i \xi^j$ が $(\xi^k)^*$ と同じ変換をすることを示してもよい．(9.17) にさらに **3** を掛けると，(9.17) の第 1 項からは，

$$\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \tag{9.18}$$

がでてくることはメソンの場合と同じである．ただしメソンの場合と違い，(9.16) の A^{ij} に ξ^k を掛けて全反対称にしたものが **1** となり，残りの 8 個が 8 重項となる．(9.17) の第 2 項 **6** との積からは，18 個のベクトルがつくられるが，このうち添字すべてについて対称のもの 10 個が一つの既約表現をつくり，残りの 8 個が別の既約表現をつくる．すなわち，

$$\mathbf{6}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{8}\oplus\mathbf{10} \tag{9.19}$$

結局

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{1}_{\mathrm{A}}\oplus\mathbf{8}_{\mathrm{MA}}\oplus\mathbf{8}_{\mathrm{MS}}\oplus\mathbf{10}_{\mathrm{S}} \tag{9.20}$$

が導けた．このうち **1** は 3 個の添字について，全反対称（A；antisymmetric）であり，**10** は全対称（S；symmetric）である．二つの **8** は，I_3-Y 平面では同じ位置を占めるが，上記のつくり方からわかるように混合対称性（mixed symmetry）を示し，一方は最初の 2 個の添字について反対称，他方は対称となっていて対称性が異なる．(9.20) の下付きの記号はこの対称性を示す．実験的には，$1/2^+$ の **8** と $3/2^+$ の **10** 重項（図 9.5）が実現しているので，実在のスピン 1/2 バリオンは，この二つの混合対称の組み合わせとして得られる．

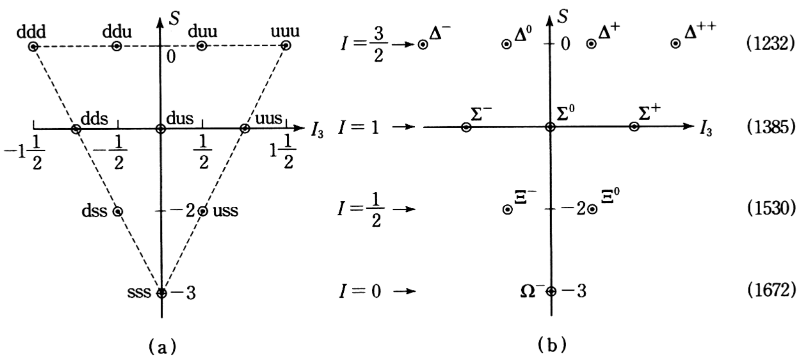


図 9.5 クォーク 3 個の完全対称な組み合わせによる 10 重項と観測されている $(3/2)^+$ の 10 重項 (a) クォーク図，(b) 観測されている $(3/2)^+$ 共鳴．右端の数字は質量 (MeV) を示す．

演習 9.1 (9.16) の対称性が変換で変わらないこと，すなわち対称（反対称）であったものは $SU(3)$ 変換後も対称（反対称）であることを証明せよ．

演習 9.2 (9.16) の A^{ij} の量子数をみることによって，これが **3** でなく **3*** に属することを証明せよ．

演習 9.3 $\psi_1\equiv\varepsilon_{ijk}\xi^i\xi^j\xi^k$ が，$SU(3)$ 変換により変わらないこと，すなわち 1 重項であることを示せ．

9.1.6 多重項合成の一般則

多重項合成の場合の大体の規則を理解するために，いままでは簡単な例について行ってきたが，多重項の次元数が大きくなると急速に複雑になる．$SU(2)$

群と同じように，$SU(3)$ 群にも一般的な合成法則が確立していて変換行列の表もできているので，通常は表を参照して計算する．$SU(3)$ 群の包括的な解説については付録 F を参照してもらうこととして，ここでは $SU(2)$ 群における角運動量合成則の $SU(3)$ 群への拡張を簡単に説明しておこう．$SU(2)$ では，一つの多重項は角運動量 J（数学用語でいえばカシミヤ演算子の固有値）で，多重項内の要素は $M=(J, J-1, \cdots, -J)$ で指定される．j_1 で指定される多重項の $2j_1+1$ 個の要素と j_2 で指定される多重項の $2j_2+1$ 個の要素の積で表される $(2j_1+1)(2j_2+1)$ の要素からなる群は一般に可約であるが，

$$\boldsymbol{j}_1 \otimes \boldsymbol{j}_2 = (\boldsymbol{j}_1+\boldsymbol{j}_2) \oplus (\boldsymbol{j}_1+\boldsymbol{j}_2-\mathbf{1}) \oplus \cdots \oplus (|\boldsymbol{j}_1-\boldsymbol{j}_2|) \tag{9.21 a}$$

のように既約群の和に分解でき，(J, M) で指定される既約群の各要素は，クレプシュ-ゴルダン係数を使い

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{JM}_{j_1 m_1, j_2 m_2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \tag{9.21 b}$$

と表せた（付録 D.11）．この場合，$M=m_1+m_2$ という制限がつく．

$SU(3)$ 群の場合，例えば $\mathbf{3}$ と $\mathbf{3}^*$ があるように，次元数のみでは多重項を唯一に指定できず，二つの指標が必要である．これはカシミヤ演算子が 2 個あることに対応するが，各要素をテンソルで表すときの指標 (p, q) を使うと便利である（付録 F.4）．次元数 D は $(p+1)(q+1)(p+q+2)/2$ で与えられ，$D(0, 0)$ が $\mathbf{1}$，$D(1, 0)$ が $\mathbf{3}$，$D(0, 1)$ が $\mathbf{3}^*$，$D(1, 1)$ が 8 を表す（付録 F.43 参照）．(9.21 a) に対応する積表現の既約表現への分解法はヤング図を使えばできて（付録 F.5 参照），

$$D(p_1, q_1) \otimes D(p_2, q_2) = \Sigma n[p, q] D(p, q) \tag{9.22 a}$$

$$\text{例：} \mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{27}$$

のようになる（付録 F.54 参照）．$SU(2)$ 群と違うところは，(9.21 a) では J を指定すれば表現は唯一に決まったが，$SU(3)$ 群では同じ (p, q) を与える多重項が一つとは限らず，$n[p, q]$ が 1 より大きい数となることである．上の例でいえば，対称性の異なる 2 種類の 8 が出現している．

(9.21 b) に対応する合成則は，

$$|\mu_\gamma, \nu\rangle = \sum_{\nu_1, \nu_2} \begin{pmatrix} \mu_\gamma \mu_1 \mu_2 \\ \nu \ \ \nu_1 \nu_2 \end{pmatrix} |\mu_1, \nu_1\rangle |\mu_2, \nu_2\rangle \tag{9.22 b}$$

ここに μ は多重項を指定する指標で (p, q) で指定される．下付きの指標 γ は，(9.22 a) の例のように同じ μ もしくは (p, q) をもつが，違う多重項を区別するときに使われる．ν は多重項内の各要素を示し，通常は (Y, I, I_3) を指定して決める．$Y=Y_1+Y_2$, $I_3=I_{31}+I_{32}$ という制限がつく．

ウィグナー-エッカートの定理： $SU(2)$ 群の場合の

$$\langle j_2 m_2 | T(JM) | j_1 m_1 \rangle = \delta_{m_2, M+m_1} C^{j_2, m_2}_{JM, j_1 m_1} \langle j_2 \| T^J \| j_1 \rangle \tag{9.23 a}$$

に対応する式は

$$\langle \mu_2 \nu_2 | T(\mu\nu) | \mu_1 \nu_1 \rangle = \sum_\gamma \begin{pmatrix} \mu_{2\gamma} \mu \mu_1 \\ \nu_2 \ \ \nu \nu_1 \end{pmatrix} \langle \mu_2 \| T^\mu \| \mu_1 \rangle \tag{9.23 b}$$

である．次に述べるゲルマン-大久保の質量公式は，ウィグナー-エッカートの定理の応用例である．

9.2 $SU(3)$ の予言

9.2.1 ゲルマン-大久保の質量公式

$SU(3)$ 対称性が完全であれば，$m_u=m_d=m_s$ のはずである．$m_u \simeq m_d$ はかなりよい近似で成り立っているものの $(m_p \simeq m_n)$，$\Delta m \equiv m_s - m_u \simeq (m_\Lambda - m_p)$ はかなり大きい．そこでこの質量差が $SU(3)$ 対称の破れの原因であると考えると，質量項を与えるハミルトニアンは，

$$\begin{aligned} H &= m_u(\bar{u}u + \bar{d}d) + m_s \bar{s}s \\ &= \frac{2m_u + m_s}{3}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s) - \frac{\Delta m}{3}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s) \\ &\equiv m_0 \bar{\psi}\psi - \frac{\Delta m}{\sqrt{3}} \bar{\psi}\lambda_8 \psi \equiv H_S + H_{MS} \end{aligned} \tag{9.24}$$

(9.24) の第 1 項は $SU(3)$ の 1 重項，第 2 項は 8 重項の $I=Y=0$ のメンバーのように振る舞うので，第 2 項が $SU(3)$ の破れの原因となる．

ゲルマンは，(9.24) から 8 重項に属する粒子について，

$$\frac{1}{2}(m_N + m_\Xi) = \frac{1}{4}(3m_\Lambda + m_\Sigma) \tag{9.25 a}$$

$$m_K{}^2 = \frac{1}{4}(3m_\eta{}^2 + m_\pi{}^2) \tag{9.25 b}$$

を導き，さらに大久保[8]は任意の多重項について

$$M=a+bY+c\left[I(I+1)-\frac{1}{4}Y^2\right] \tag{9.26}$$

を導いた．a, b, c は多重項ごとに異なる定数である．(9.26) をゲルマン-大久保の質量公式という．中間子については質量の自乗をとるのは，ラグランジアンに現れる質量項に合わせたためで，そうしなければならぬ必然性はないが実験との一致は確かによくなる．実際の質量値を代入すると，(9.25 a) の左辺は，1128.5MeV，右辺は1135.0MeV となり，(9.25b) の左辺は0.246MeV^2，右辺は 0.231 MeV^2 となり一致は非常によい．

演習 9.4　(9.26) から，(9.25 a)，(9.25 b) を導け．

演習 9.5　(9.24) のハミルトニアンの期待値を 8 重項の波動関数を使って計算し，(9.25) を直接導け．

9.2.2　Ω（オメガ）の予言

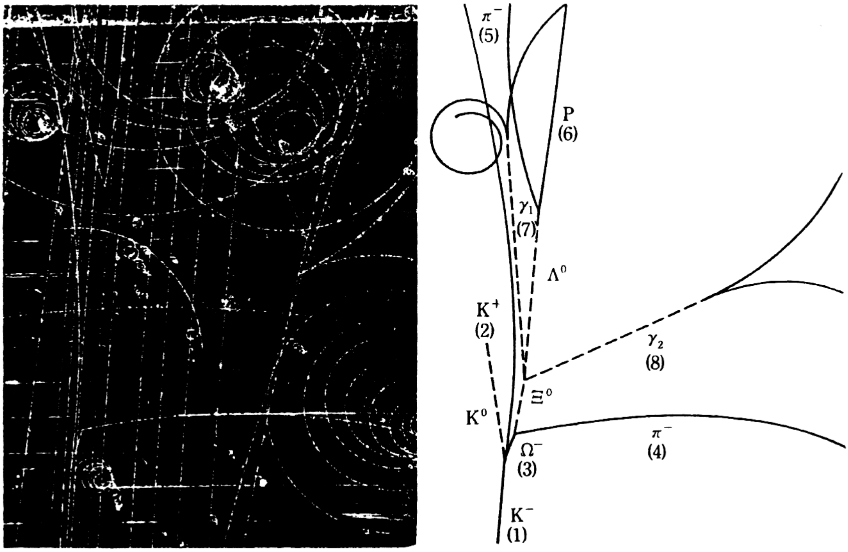
香りの $SU(3)$ が考えられたころは，スピンが 3/2 のバリオンについては，$\Delta(1232)$, $\Sigma(1385)$, $\Xi(1530)$ は知られていて*3)，これらは 10 重項に適合する量子数をもつ（図 9.5）．しかし，当時は最後のメンバー $\Omega\,(I=0,\ Y=-2)$ は見つかっていなかった．$SU(3)$ 対称を信じれば，Ω というスピン 3/2 をもつ粒子が存在し，$I=0$, $Q=-1$, $S=-3$ をもたねばならない．しかも (9.26) の質量公式をスピン 3/2 の 10 重項（Ξ^* のように * を付けて表す）に適用すると，

$$M(\Omega)-M(\Xi^*)=M(\Xi^*)-M(\Sigma^*)=M(\Sigma^*)-M(\Delta) \tag{9.27}$$

が得られるので，$M(\Delta)=1232$ MeV, $M(\Sigma^*)=1385$ MeV, $M(\Xi^*)=1530$ MeV を入れると，$M(\Omega)\sim1680$ MeV となる．この粒子は強い相互作用での崩壊ができない．なぜなら，$S=-3$ をもつバリオンをつくるための組み合わせは，$(\Xi\bar{K})$, $(\Lambda\bar{K}\bar{K})$, $(N\bar{K}\bar{K}\bar{K})$ などであるが，$M(\Xi^0K^-)\geqq1809$, $M(\Lambda\bar{K}^0K^-)\geqq2107$, $M(p\bar{K}^0K^-K^-)\geqq2423$ MeV で，すべて Ω より重くエネルギー的に崩

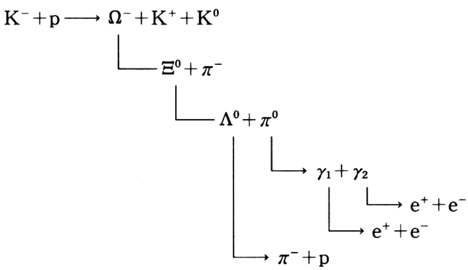
---

*3)　スピンパリティの異なるバリオン励起状態の表記法として，核子 ($I=1/2$, $Y=1$), $\Delta\,(I=3/2$, $Y=1)$, $\Lambda\,(I=0$, $Y=0)$, $\Sigma\,(I=1$, $Y=0)$, $\Xi\,(I=1/2$, $Y=-1)$ と同じ量子数をもつ粒子に対して，それぞれ N (1440), Δ (1232), Λ (1520), Σ (1385), Ξ (1530) のように，括弧の中に質量値を記す．



(a)　　(b)

図 9.6　ブルックヘブン研究所の泡箱で見つかった Ω 粒子の生成写真 (a)，同説明図 (b)[9)]



K^0 は写真には写っていないが，エネルギー運動量保存則から見えない質量 (M_x) が計算でき，$M_x = M_K$ として存在がわかる．

壊不可能だからである．エネルギー的に崩壊可能な $(\Lambda\bar{K})$, $(\Xi\pi)$ は $S=-2$ 状態であるので，弱い相互作用で崩壊する．この予言に基づいてアメリカのブルックヘブン国立研究所の泡箱チームは Ω 探索に乗り出し，約 10 万枚の写真の中から図 9.6 のような Ω 粒子生成の証拠を見いだした[9)]．この Ω 粒子の質

量値は 1686±12 MeV と計算され，かつ飛跡の長さから寿命は 10^{-10} 秒程度と推察された．質量値まで含めて理論の予想が非常によい精度で一致したことは，$SU(3)$ 対称の大きな成功であった．Ω の予言は $SU(3)$ の帰結であって，クォークモデルと直接は関係ないが，歴史的にはこの成功に刺激されてクォークモデルが提唱されたのであった．

なお，これまでは強い相互作用の散乱に現れる共鳴は 10^{-23} 秒程度の寿命をもち，10^{-10} 秒程度以上の長い寿命をもつ準安定粒子（弱い相互作用で崩壊する）とは別種の粒子であるかのように扱われていたが，Ω と同じ 10 重項に属する他の粒子と比較すれば，寿命は粒子の種類分けには何ら本質的な役割をもたないことは明らかである．すなわち，すべてのハドロン共鳴はクォークの複合体として陽子や π 中間子などと同じレベルの粒子と見なすことが正しい．

9.2.3　中間子混合

$SU(3)$ 対称は厳密な対称性ではなく，(9.24) のような $SU(3)$ を破る相互作用が存在する．この相互作用は，8 重項の中性メンバーと同じ変換性をもつので，違う多重項に属していても同じ Y と I, I_3 をもつ状態間の遷移行列要素が 0 にならない．例えば，中間子の 1 重項 ϕ_0 と 8 重項の $Y=I=I_3=0$ のメンバー ϕ_8 とが混合する．そこで，

$$\begin{aligned}\phi&=\cos\theta\ \phi_8-\sin\theta\ \phi_0\\ \omega&=\sin\theta\ \phi_8+\cos\theta\ \phi_0\end{aligned}\tag{9.28}$$

とおく．ϕ, ω は質量の固有状態であるので，$\boldsymbol{M}$ を 2×2 の質量行列として

$$\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\phi\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_\phi & 0\\ 0 & M_\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\\ \omega\end{bmatrix}^{*4)}\tag{9.29 a}$$

一方，ϕ_8, ϕ_0 を基底とする質量行列 $\boldsymbol{M}'$ は，

$$\boldsymbol{M}'\begin{bmatrix}\phi_8\\ \phi_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_8 & M_{80}\\ M_{08} & M_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_8\\ \phi_0\end{bmatrix}\tag{9.29 b}$$

$\mathrm{Tr}\boldsymbol{M}=\mathrm{Tr}\boldsymbol{M}'$, $\det\boldsymbol{M}=\det\boldsymbol{M}'$ より，

*4) 中間子であるので，質量の自乗を使うべきであるが，簡単のためこのままで計算して最後に自乗で置き換えることにする．

$$M_\phi + M_\omega = M_8 + M_0 \tag{9.30 a}$$

$$M_\phi M_\omega = M_8 M_0 - M_{08} M_{80} \tag{9.30 b}$$

が成立する．(9.28)～(9.30) を使って，

$$\sin^2\theta = \frac{M_\phi - M_8}{M_\phi - M_\omega} \tag{9.31}$$

を得るが，ゲルマン-大久保の公式（式 (9.25 b)；この式は混合がないと仮定している）より得られる

$$M_8 = (4M_{K^*} - M_\rho)/3 \tag{9.32}$$

を使うと

$$\sin^2\theta = \frac{1}{3}\frac{3M_\phi + M_\rho - 4M_{K^*}}{M_\phi - M_\omega} \tag{9.33}$$

$\sin\theta$ の符号は，

$$\tan\theta = \frac{M_8 - M_\phi}{M_{08}} \tag{9.34}$$

より決められる．表 9.3 に代表的な中間子の混合角データを示す．実際の計算の場合は質量の自乗値を使う．

表 9.3　中間子の混合角

	0^-		1^-		2^+	
質量	η'	957.5	ω	782.0	f_2	1274
(MeV)	η	548.8	ϕ	1019.4	f'_2	1525
	π^0	135.0	ρ^0	769	a_2	1318
	K^0	497.7	K^*	892.1	K^*_2	1426
M_8		569.4		929.5		1460
$\sin\theta$		−0.192		0.640		0.525
θ		11°		39.8°		31.6°

演習 9.6　(9.31)，(9.32) を導け．

$\sin\theta = 1/\sqrt{3}$（$\simeq 0.577$，$\theta \simeq 35.3°$）のとき，

$$\phi = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) - \sqrt{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) = -s\bar{s} \tag{9.35}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \tag{9.36}$$

となる．これを理想混合という．ベクトルメソン 1^- とテンソルメソン 2^+ については，混合がほぼ理想的であることがわかる．擬スカラー 0^- については，混合角は小さいが，これは，M_{η}' が M_8 より大きくなっているからで，これはカイラル異常項からの寄与などがあるからとされている[10)]．理想混合が成立していると，ϕ, f_2'〜$s\bar{s}$, ω, f_2〜$u\bar{u}+d\bar{d}$ であるので，崩壊モードは前者の場合 $K\bar{K}$ が，後者では $\pi\pi$ または 3π モードが優勢であろうと考えられる（後述「OZI 則」参照）．素粒子表を参照すると $BR(\phi \to K\bar{K}) \simeq 84\ \%$, $BR(\phi \to 2\pi) \simeq 15\ \%$, $BR(\omega \to 3\pi) \simeq 90\ \%$, $BR(f_2' \to K\bar{K}) \simeq 100\ \%$, $BR(f_2 \to 2\pi + 4\pi) \simeq 95\ \%$, $BR(f_2 \to K\bar{K}) \simeq 4\ \%$ となっていて，予想が裏付けられている．

演習 9.7　ベクトル 1^- 粒子が，レプトン対 $l\bar{l}$ に壊れる反応は，フォトン (γ) の中間状態を通るので，崩壊幅は，$Q^2 = (\sum_i Q_i)^2$ に比例する（詳しい計算によれば[11)]

$$\Gamma = \frac{16\pi^2\alpha^2 Q^2}{M_V{}^2}|\psi(0)|^2 \tag{9.37}$$

ただし，α は微細構造定数，ψ はベクトル粒子の波動関数，M_V は粒子の質量である）．$M_\rho = M_\omega = M_\varphi$ とすると理想混合の場合

$$\Gamma_\rho : \Gamma_\omega : \Gamma_\phi = 1/2 : 1/18 : 1/9 \tag{9.38}$$

を示せ．実験データは，11.3±0.7：1：2.28±0.11 であり，ほぼ合っている．

9.3　カラー自由度の導入

10 重項の Ω^- は sss，Δ^{++} は uuu のように同一粒子 3 個よりなる．しかもスピンが 3/2 ということは，スピンもまた ↑↑↑ のように並んでいることを示す．クォーク複合体の基底状態は軌道角運動量 $L=0$ をもつと推察されるから（$L \geqq 1$ の状態はより高いエネルギー状態にあると考える），クォーク 3 個で全体として対称な波動関数をつくっていることになる．クォークはスピン 1/2 をもつからフェルミ統計に従うべきという要請と矛盾する．そこで新しい自由度 “color＝色またはカラー” を導入し，カラー自由度をも含めた全体で反対称になっているとする．3 個の粒子から全反対称な波動関数をつくるためにはカラー自由度は 3 でなければならない．$SU(3)$ 対称をもてば $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}$ からつくられる 1 重項は全反対称である（(9.18) に続く議論を参照）．各カラーの自由度に対し，色の 3 原色をもじって，赤 (red)＝R，緑 (green)＝G，青 (blue)

$=B$ と名付ける．別に色でなくても例えば η_1, η_2, η_3 のように番号を付けるだけでもよいのであるが，名付け親のゲルマンが茶目っ気をだしたものである．これが意外と便利なのは，自然界で実現される状態がどうやら，カラー1重項に限られることであり，中間子1重項であれ，バリオン1重項であれどちらも白色として比喩的に表すことが可能だからである．このカラーこそが強い力の源泉ではないかと最初に示唆したのは，ハン (Han)-南部であった[12]．ただし，彼らのモデルではクォークは依然として整数電荷をもっていた．カラー自由度が存在し，しかも自由度の数が3であることにはいくつかの証拠がある．

カラー自由度存在の証拠

1)　Ω^-, Δ のスピン統計：　これは上に述べた．

2)　$\pi^0 \to \gamma+\gamma$：　このプロセスは，$\pi^0 \to \mathrm{q\bar{q}} \to \gamma\gamma$ のようにクォークループを通じて崩壊する．崩壊率 $\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma)$ はクォークモデルで計算可能であり，カラー自由度の自乗に比例する ($\Gamma \propto N_c^2$)．実験値を再現するためには $N_c=3$ でなければならない．

3)　ドレル-ヤン (Drell-Yan) 過程：　陽子と陽子の反応で，質量の大きなレプトン対をつくる過程　$\mathrm{pp} \to \mathrm{l\bar{l}}+\mathrm{X}$ をクォークモデルで計算すると，生成断面積が N_c に比例することが示せて，実験との比較からやはり $N_c=3$ が結論される．

4)　電子と陽電子衝突における R 値はクォークのもつ電荷を Q_i として次式で定義される．

$$R \equiv \frac{\sigma(\mathrm{e^+e^-} \to \text{ハドロン})}{\sigma(\mathrm{e^+e^-} \to \mu\mu)} = N_c \sum_i (Q_i)^2 \tag{9.39}$$

$$= 3\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots\right]$$

$$= 2(\mathrm{u,d,s}),\quad 10/3(\mathrm{u,d,s,c}),\quad 11/3(\mathrm{u,d,s,c,b}) \tag{9.40}$$

ここで，すべてのハドロンは，クォークが自由空間にでていく際にハドロン化したものであり，ハドロン生成の全断面積は，そのエネルギーで生成可能なクォークの全断面積に等しいと考える．クォークはディラック粒子であるので，生成断面積は電荷が異なる以外は，ミューオン対生成断面積に等しい．よって，(9.39) の式が成立する．チャームクォーク（後述§9.5）生成のエネ

ルギーしきい値は ~2×1.5=3 GeV にあり，このエネルギー以下では，u, d, s クォークのみ生成されるので，$R=2$ である．しきい値付近には共鳴がたくさんあり，R の値はクォークモデルからずれるが，しきい値を十分超えたクォークの質量が無視できるところでは，$R=10/3$ となる．さらに，b クォーク（後述§9.6）対生成のしきい値（~10 GeV）を超えると $R=11/3$ となる．カラーの自由度がなければ断面積は 3 倍小さく，実験値に合わせるにはカラー自由度が必要である（図 9.7[13]）．

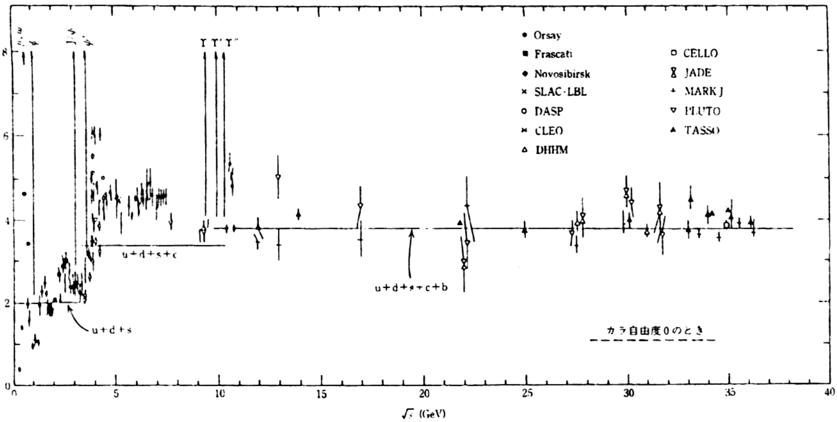


図 9.7　$R=\dfrac{\sigma(e^+e^- \to \text{ハドロン})}{\sigma(e^+e^- \to \mu\bar{\mu})}=N_c\sum_i Q_i^2$

$=2(u, d, s),\ 10/3(u, d, s, c), 11/3(u, d, s, c, b)$

$\rho, \phi, J/\psi, \Upsilon$ などの線は鋭い山が存在するところ[13]．

5)　弱い相互作用の媒介粒子 $W^\pm$ の崩壊モードには，

$$W \to e\bar{\nu}_e,\quad W \to \mu\bar{\nu}_\mu,\quad W \to \tau\bar{\nu}_\tau,\quad W \to \bar{u}d',\quad W \to \bar{c}s'$$

の五つあり，崩壊後クォークはハドロン化する．ただし，d′, s′ はカビボ回転した d, s である（§10.4.4 参照）．レプトンとクォークの質量差を無視すれば，各モードの崩壊率はすべて等しい．したがって，W が $e\bar{\nu}_e$ にいく分岐比は，カラー自由度を考えなければ 1/5，カラー自由度を考えると 1/9 となる． 実験値は 11 % でカラー自由度の存在を支持する．

9.4 $SU(6)$ 対称性

9.4.1 $SU(6)$ 対称性

a. スピンと香りの自由度

クォークにカラー自由度があるならば，クォークの波動関数 ψ は，

カラー波動関数 × 香り波動関数 × スピン波動関数 × 空間波動関数

の積として表される．すべてのハドロンはカラー1重項であり，これまでに観測されているハドロン群の空間波動関数は S 状態であると仮定するならば，残る自由度は香りとスピンの自由度，$3\times2=6$ である．これらの六つの自由度が平等で，相互作用がこれらの入れ換えで不変とするならば，考慮すべき対称性は $SU(6)$ となる．カラー1重項は全反対称であるから，$SU(6)$ 対称の下では波動関数は全対称でなければならない．基底ベクトルは

$$(\xi^1, \cdots, \xi^6)=(\mathrm{u}\uparrow, \mathrm{u}\downarrow, \mathrm{d}\uparrow, \mathrm{d}\downarrow, \mathrm{s}\uparrow, \mathrm{s}\downarrow) \qquad (9.41)$$

これを **6** または，(香り，スピン）に分けて，$(3, 1/2)$ のように表す．

基本表現から複合表現をつくるやり方は，$SU(3)$ の場合と全く同じで，中間子は

$$\mathbf{6}\otimes\mathbf{6}^*=\mathbf{1}\oplus\mathbf{35}=(1,0)\oplus(1,1)\oplus(8,0)\oplus(8,1) \qquad (9.42)$$

となるので（付録F.59），メソン (0^- と 1^-) には，1重項と8重項（まとめて9重項という）が現れることになる．バリオンは，

$$\mathbf{6}\otimes\mathbf{6}\otimes\mathbf{6}=\mathbf{20}_{\mathrm{A}}\oplus\mathbf{70}_{\mathrm{MA}}\oplus\mathbf{70}_{\mathrm{MS}}\oplus\mathbf{56}_{\mathrm{S}} \qquad (9.43)$$

であるが，クォークのフェルミ統計性から全対称な **56** 表現のみ現れるはずである．香りとスピンに分けると

$$\mathbf{56}=(8,1/2)\oplus(10,3/2) \qquad (9.44)$$

となり，バリオンは，1/2の8重項と，3/2の10重項でつきている．すなわち，バリオン $(1/2)^+$ は中間子と違い9重項ではない．なお，§9.1.5で，スピン1/2のバリオンは，混合対称である二つの8の組み合わせであることを述べたが，組み合わせの法則はスピン波動関数と合わせて全対称になるようにすればよいことがここでわかった．これらの事実は観測と一致している．

b. $SU(6)$ 波動関数のつくり方

8重項の香りの波動関数とスピン波動関数はどちらも混合対称であるが，合わせたものは $L=0$ の基底状態では完全対称でなければならない．例えば $|p\rangle \sim uud$ を考える．はじめの二つの uu に関しては対称なので，スピン関数も対称でなければならない．対称な2体のスピン関数は

$$|1,1\rangle = \uparrow\uparrow, \quad |1,0\rangle = (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}, \quad |1,-1\rangle = \downarrow\downarrow$$

で表され，スピン1をもつ．これに第3のクォークのスピン1/2を加えて全体としてスピン1/2をつくるにはクレプシュ-ゴルダン係数を使って，

$$|1/2,\ 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\uparrow\uparrow\downarrow - \sqrt{\frac{1}{3}}\frac{(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\uparrow}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}[2\uparrow\uparrow\downarrow - (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\uparrow]$$

波動関数は全対称でなければならないが，これは，粒子 $1\to 2\to 3$ の巡回置換をとり，全部足してやれば実現できる．すなわち

$$\begin{aligned}|p\rangle &\sim uud[2\uparrow\uparrow\downarrow - (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\uparrow] + \text{cyclic}\\ &\sim (1/\sqrt{18})(2u\uparrow u\uparrow d\downarrow - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow\\ &\qquad + 2u\uparrow d\downarrow u\uparrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow\\ &\qquad + 2d\downarrow u\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow)\end{aligned} \qquad (9.45\,\text{a})$$

となる．規格化因子は $\langle p|p\rangle = 1$ になるように定める．

演習 9.8 はじめの二つのクォークの香りに関して反対称な関数

$$(ud - du)u(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow$$

から出発しても同じ波動関数を与えることを示せ．

c. 陽子の磁気能率

$SU(6)$ の波動関数は (9.45 a) で与えられるが，u, d のスピンの相対的な向きは常に同じなので，磁気能率を考えるときは巡回置換の第1項のみでよい．ただし，規格化は必要．ゆえに

$$|p\rangle = uud[2\uparrow\uparrow\downarrow - (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\uparrow]/\sqrt{6} \qquad (9.45\,\text{b})$$

陽子の磁気能率が各クォークの磁気能率のベクトル和であるとすると，

第1項より陽子の磁気能率は，確率 $(2/\sqrt{6})^2 = 2/3$ で $\mu_p = \mu_u + \mu_u - \mu_d$

第2項より 確率 $(1/\sqrt{6})^2 \times 2$ で $\mu_p = \mu_u - \mu_u + \mu_d$

をもつことがいえるから

$$\therefore \quad \mu_p = \frac{2}{3}(2\mu_u - \mu_d) + 2\times\frac{1}{6}\mu_d = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d) \qquad (9.46)$$

同様に中性子に対して，

$$\mu_n = \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u) \qquad (9.47)$$

厳密な $SU(6)$ では $m_u = m_d$ であるので，$\mu_d = -(1/2)\mu_u$，したがって $\mu_n/\mu_p = -(2/3)$ となるはずである．実験値 (-0.685) との一致は非常によく $SU(6)$ の大きな成果の一つと考えられた．ここでは，一歩踏み込んで (9.46) と同様の式をスピン 1/2, 3/2 のすべてのバリオンについて計算し，m_u, m_d, m_s をパラメターとして実験値に合わせるように決めることにする．表 9.4 に結果を示す[14]．

表 9.4 $SU(6)$ 波動関数からバリオンの磁気能率

バリオン	磁気能率	計算値	観測値*
p	$(4/3)\mu_u-(1/3)\mu_d$	INPUT	$2.792847386\pm0.000000063$
n	$-(1/3)\mu_u+(4/3)\mu_d$	INPUT	-1.91304275 ± 0.00000045
Λ^0	μ_s	INPUT	-0.613 ± 0.004
Σ^+	$(4/3)\mu_u-(1/3)\mu_s$	2.67	2.419 ± 0.022
Σ^0	$(2/3)(\mu_u+\mu_d)-(1/3)\mu_s$	0.79	?
$\Sigma^0\to\Lambda^0$	$-(\mu_u-\mu_d)/\sqrt{3}$**	-1.63	-1.61 ± 0.08
Σ^-	$(4/3)\mu_d-(1/3)\mu_s$	-1.09	-1.156 ± 0.014
Ξ^0	$-(1/3)\mu_u+(4/3)\mu_s$	-1.43	-1.253 ± 0.014
Ξ^-	$-(1/3)\mu_d+(4/3)\mu_s$	-0.49	-0.675 ± 0.022
Ω^-	$3\mu_s$	-1.84	-2.08 ± 0.15

* 陽子のボーア磁子 $(e/2m_p)$ を単位とする．
** $\Sigma^0\to\Lambda^0$ への遷移磁気能率．

演習 9.9 表 9.4 を導け．

上の表の値から $\mu_i = q_i e/2m_i$ により決めたクォークの質量は，

$$m_u = 338\ \mathrm{MeV}, \quad m_d = 322\ \mathrm{MeV}, \quad m_s = 510\ \mathrm{MeV} \qquad (9.48)$$

であるので，$m_u \simeq m_d \simeq (1/3)m_p$，$m_s - m_u \simeq m_\Lambda - m_p$ がほぼ成立していることがわかる．

9.4.2 $SU(6)\times O(3)$

軌道角運動量の励起状態を考慮すれば，$L=0(S)$，$1(P)$，$2(D)$，… が可能

である．各質量レベルについて，${}^{2S+1}L_J(J^{PC})$ という分光学の表記法を使うと，既述の $0^-, 1^-$ は，${}^1S_0(0^{-+})$, ${}^3S_1(1^{--})$ となる．$L>0$ の励起状態としては，中間子では，${}^1P_1(1^{+-})$, ${}^3P_0(0^{++})$, ${}^3P_1(1^{++})$, ${}^3P_2(2^{++})\cdots$ などが実際に見つかっている (図9.8[15])．バリオンについては，$L>0$ ならば，$SU(6)$ の混合対称 **70** が現れる．$J^P(SU(6), L^P)$ で示せば，8重項では，$1/2^+(56, 0^+)$, $1/2^-(70, 1^-)$, $3/2^-(70, 1^-)\cdots$，10 重項では $3/2^+(56, 0^+)\cdots$ などがある．軌道角運動量は，空間回転対称に基づくから，$O(3)$ 対称であり，これまでの対称性に付加すると，$SU(6)\times O(3)$ 対称となる．

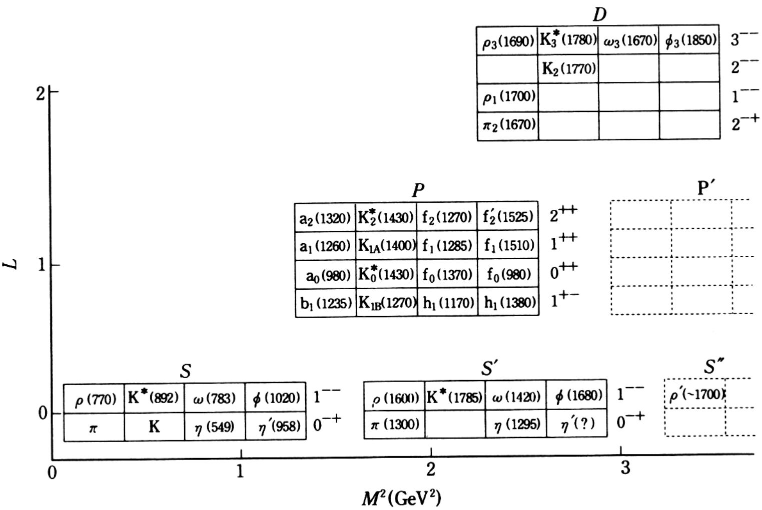


図 9.8　観測されているメソンデータを $SU(6)\times O(3)$ で分類したもの[15]
空白のところは未発見である．表の右側は J^{PC} を示す．

9.5　チャームクォーク

9.5.1　チャーム粒子の発見

1974年の11月は，高エネルギー物理学者にとっては11月革命という事件で記憶されている．夏には米国東海岸のブルックヘブン研究所 (BNL ; Brookhaven National Laboratory) で，ティン (C.C. Ting) のグループが，pp →

$e^+e^- + X$ 反応で，$M_{ee} \simeq 3$ GeV 付近に異常に鋭くかつ大きな共鳴を見つけていたが，あまりに異常な振る舞いのためにもう一つ確信がもてずに，発表を控えいろいろとテストを繰り返していた．一方，西海岸では，スタンフォード加速器センター (SLAC ; Stanford Linear Accelerator Center) でリヒター (B. Richter) をリーダーとするチームが，電子陽電子衝突型加速器スピア (SPEAR) で全衝突断面積を測定していたが，やはり夏頃から全重心系エネルギー～3 GeV で実験を繰り返すたびに反応率が極端に上がったり下がったりして安定な結果が得られないことに苛立ちを感じていた．再現性のないのは，エネルギー設定の精度が良くないのではないかと気がつき，加速器のエネルギー設定精度を上げてやり直したところ，非常に幅の狭い共鳴が～3 GeV 付近に見つかったのである．ティンは J 粒子と名付け，SLAC では ψ 粒子と名付けたが，今は J/ψ という名となっている．J/ψ 粒子が騒がれた理由は，質量値が 3 GeV という大きな値であるにもかかわらず，その共鳴幅が，実験測定精度の限界 (～数 MeV) を超えた小さな値であったからである．親の質量が大きくて崩壊生成粒子の質量が小さな場合 (数個の π 中間子ならば総質量はせいぜい親の 1/10)，Q 値が大きいので非常に不安定であると予想される．つまり崩壊幅 (寿命の逆数に比例) が強い相互作用で崩壊する粒子，例えば ρ 中間子 (質量 770 MeV，崩壊幅 153 MeV) と同程度かあるいはより大きいはずだからである．この事情は，ストレンジネスをもつ粒子が発見されたときと似ている．ともあれ，この解釈を巡って大いに議論が沸騰したが，直ちにこれは第 4 のクォーク，チャームからできている粒子と決着がつき，ティンとリヒターは 1975 年のノーベル賞を受賞した．発見から受賞までの期間の短さはパリティ非保存発見のリー-ヤンにつぐ．いかに高エネルギー物理学界の話題となったかが想像がつく．

J/ψ は次の反応で発見された．

$$\text{BNL}^{16)}: \quad p + B_e \longrightarrow J/\psi + \cdots\cdots \tag{9.49}$$
$$\hookrightarrow e^+e^-$$

$$\text{SLAC}^{17)}: \quad e^+ + e^- \longrightarrow J/\psi \longrightarrow e^+e^- \tag{9.50}$$
$$\hookrightarrow \mu^+\mu^-$$
$$\hookrightarrow \text{ハドロン}$$

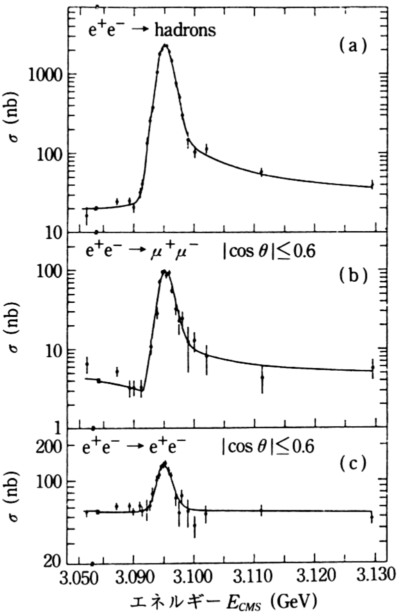


図 9.9　$e^+e^- \to J/\psi \to X$ の生成断面積図[17)]
(a) X はハドロン，(b) X はミューオン対，
(c) X は電子陽電子対

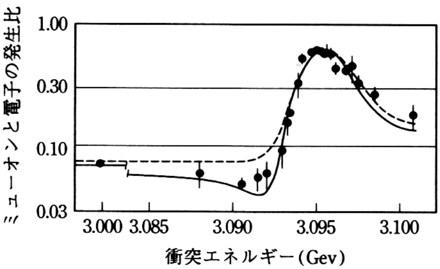


図 9.10　$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ での $\gamma-J/\psi$ 干渉効果[17)]
$e^+e^- \to \gamma \to \mu^+\mu^-$ と $e^+e^- \to J/\psi \to \mu^+\mu^-$ は γ と J/ψ が同じ量子数をもっていれば干渉が生じ，共鳴の少し手前で断面積が変化する（実線）．量子数が異なれば干渉はない（点線）．データは干渉があることを示している．

図 9.9 (a)，(b)，(c) に上記反応の SLAC での実験データを示す．横軸のエネルギーのスケールに注意．図 9.10 にミューオン対生成断面積を拡大して示すが，断面積が大きくなる前にいったん小さくなっているのがわかる．これは，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 反応の主要な寄与である 1γ 中間状態と，J/ψ 中間状態が干渉していることを示し，J/ψ がフォトンと同じ量子数 $J^{PC}=1^{--}$ をもつことを示す．また断面積が山の前後で非対称型をしているが，これは放射補正 (radiative correction) による．共鳴より大きなエネルギーをもつ電子が，反応を起こす前にフォトンを放出してエネルギーを失い残りの電子が共鳴生成に寄与するとき起こる．

9.5.2　チャーモニウム

a.　クォークに働くポテンシャル

J/ψ(3096.9±0.1 MeV) の発見に続き，より高いエネルギーのところで，ψ'(3686.0±0.1) およびその崩壊生成物（$\psi' \to \gamma+\chi$ など）から χ_{c0}(3415.1±1.0),

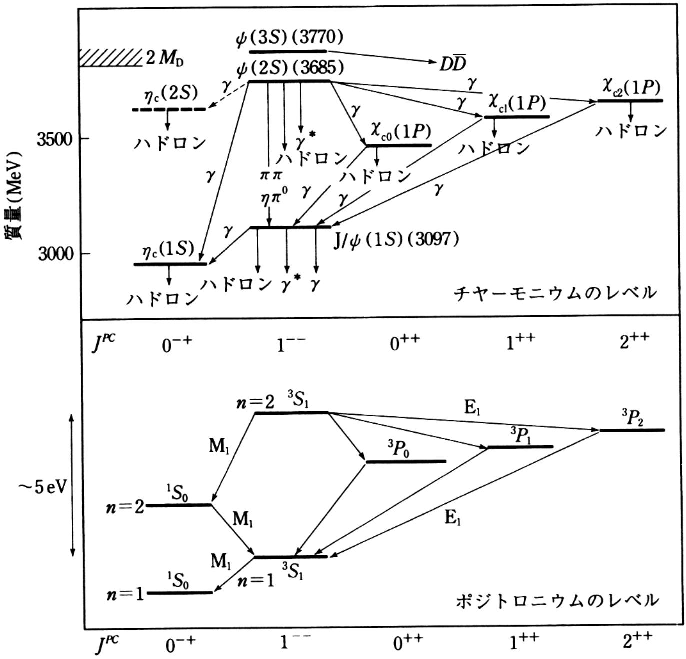


図 9.11 チャーモニウムレベルとポジトロニウムのレベルの比較[24)]

$\chi_{c1}(3510.6\pm0.5)$, $\chi_{c2}(3556.3\pm0.4)$ などが続々と発見された．J^{PC} に対してこれらの一連の共鳴を並べてみると（図 9.11 (a)），e^+ と e^- とでつくる束縛状態ポジトロニウム (positronium)（図 9.11 (b)）のレベル構造に実に良く似ているのでこれらをチャーモニウムと名付ける．両者の類似性からチャーモニウムとポジトロニウムの構造が同一であることがわかる．すなわち，スピン 1/2 をもつ点状の基本粒子 c および $\bar{c}$ が，クーロン力に似た力で，互いに引力を及ぼして束縛状態をつくっていることがわかる．レベルの構造から純粋のクーロン力でなくポテンシャルが，

$$V(r)=-\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r}+kr \qquad (9.51)$$

という構造として比較的よく再現する（図9.12）*5)．第1項の係数は後の

*5) $V=r^N$, $-1\leqq N\leqq 2$ $(1/r, \ln r, r, r^2)$ はだいたい同じようなスペクトルを与える（図 9.12）が，レッジェ軌跡 $J\propto m^2$ を与えるのは，$V\sim r$ のみである．

QCD 計算に合わせて便宜上つけてある．第2項がクォークの閉じ込めを与える．なぜなら二つのクォークを引き離す ($r\to\infty$) には無限のエネルギーを必要とするからである．

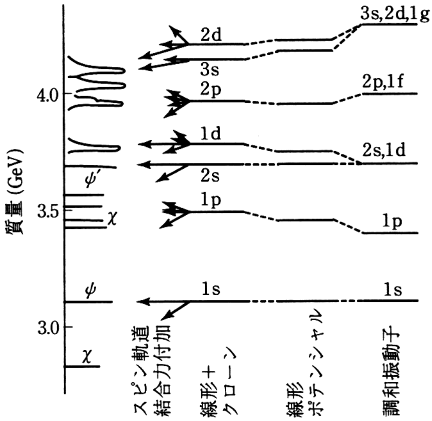


図 9.12　種々のポテンシャルによるレベルとチャーモニウムを比較したもの[18]
1番右側に調和振動子 (2次ポテンシャル)，右から2番目に線形ポテンシャル，3番目に線形ポテンシャルとクーロンポテンシャルの組み合わせ (次式)

$$V(r)=-\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r}+kr$$

となっており，これにスピン軌道結合力を導入すれば (4番目)，1番左側に並べた観測準位図を再現できる．

b．α_s の評価

クォーク間距離が $r\leqq 1/m_\pi\simeq 10^{-13}$ cm のところでは，第1項が優勢であるので，第1項のみの寄与と仮定しよう*6)．クーロンポテンシャルによるエネルギーレベル (水素原子の準位) はよく知られていて，

$$E_n=-\frac{\alpha^2}{2}\frac{m_e}{n^2}\quad : n \text{ は主量子数} \tag{9.52}$$

で与えられるので，$^3S_1$ の $n=2$ と $n=1$ のエネルギー差は，ポジトロニウムの場合，$m_e\to m_e/2$ (実効質量) として，

$$\Delta E\simeq 5\,\text{eV}=\frac{\alpha^2 m_e}{4}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{16}\alpha^2 m_e \tag{9.53}$$

*6)　後述のボトムニウムではよい近似であるが，チャーモニウムでは第2項も同程度に効く．したがって以下の議論は，α_s のおおよその推定値を得るのに限定して考えるべきである．

チャーモニウムの場合，$\Delta E \simeq 600$ MeV，$\alpha \to (4/3)\alpha_s$，$m_e \to m_c$ とする．ここで $m_c \simeq 3700/2$ MeV ととる．なぜなら，$\psi'(3686)$ は崩壊幅が狭いのに，$\psi''(3770) \to D\bar{D}$ (D は c-クォークを含むハドロン) は崩壊幅が 25 MeV と大きく強い相互作用で崩壊すること，すなわち，この二つのレベル間で，質量が m_c の 2 倍を超えることを示しているからである．数値 ($m_e \simeq 0.5$ MeV，$\alpha \simeq 1/137$) を入れると，$\alpha_s \simeq 1.0$ となる．エネルギースケールが 1 億倍も違うのに，全く同じ構造をしているのは驚異である．こうしてクォークの間には，クーロン力と同種のしかし強さが 100 倍もある強い力が作用していることがわかった．

c. 閉じ込めとレッジェ軌跡

レッジェ軌跡とは，スピン以外は同じ量子数をもつ一連の粒子群が存在し，$J \propto M^2$ の軌跡の上に乗る事実を示す (図 8.18，図 9.13[19])．$V(r)=kr$ のときには実際そうなることを示そう．いま，$V(r)=kr^n$ とし，クォークの質量は

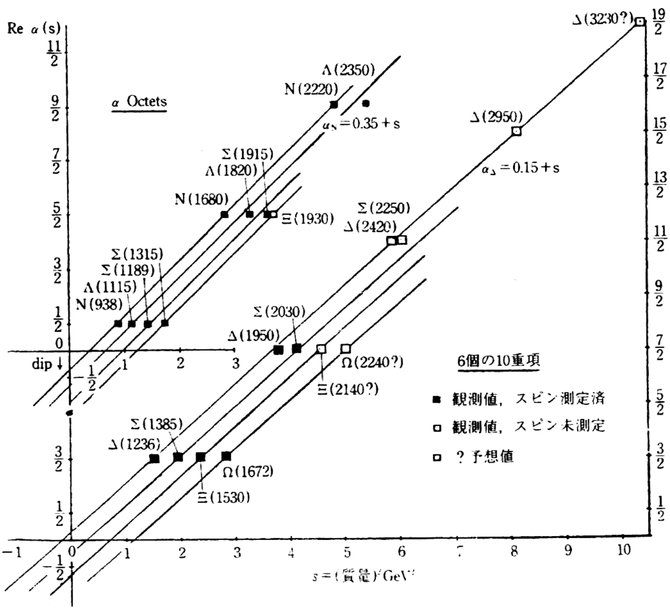


図 9.13 J 以外は同じ量子数をもつ粒子群の J-Mass^2 は直線 (レッジェ軌跡) 上にある．すべて同じ傾斜 1 GeV^{-2} をもつ．これをチュー-フラウチ (Chew-Frautchi) プロットという[19]．

無視する．2個のクォークが引き合って，回転運動をしているとすると，クォーク系の質量 M つまり全エネルギー H は，

$$H = p + kr^n \tag{9.54}$$

回転運動をしているから，古典的に考えて，

$$J = pr \tag{9.55}$$

軌道は，H が最小になるところで安定するから，

$$\frac{\partial H}{\partial r} = 0 \longrightarrow J = nkr^{n+1} \tag{9.56}$$

(9.56) を (9.54) に入れると，

$$H \propto J^{\frac{n}{n+1}} \longrightarrow J \propto M^{\frac{n+1}{n}} \tag{9.57}$$

となり，レッジェ軌跡を再現するには，$n=1$ でなければならない．

$n=1$ の場合について，計算し直すと，

$$J = \frac{M^2}{4k} \sim \frac{(Mc^2)^2}{4k\hbar c} \tag{9.58}$$

レッジェ軌跡の勾配は，図9.13から，$\sim 1\ (\mathrm{GeV})^{-2}$ であるので，

$$k = 0.25\ \mathrm{GeV}^2/\hbar c \simeq 1.3\ \mathrm{GeV}/10^{-13}\ \mathrm{cm} \tag{9.59}$$

となり，2個のクォークを1 cm引き離すのに $\sim 10^{13}$ GeV～1.5トン × 1 m の仕事量となる．これだけのエネルギーをクォーク1個につぎ込むことは不可能である．$V(r) = kr$ ということは，クォーク同士が張力が一定のゴム紐で引っ張られていることを示す．したがって，k を弦定数と呼ぶ．1.3 GeV～$9m_\pi$ に相当するから，$\sim 10^{-13}$ cm くらい離れたクォーク間には π 中間子9個分くらいのエネルギーが存在することになる．つまり，クォークがある程度以上離れると，クォークを結ぶ線上には大きなエネルギーが蓄えられることを意味する．真空中ではハイゼンベルグの不確定性原理により粒子反粒子の対が現れては消える繰り返しをしている．たまたまこの線上に発生したクォーク反クォーク対が，もともと存在するクォークとカラー1重項をつくると，対の間に働く力よりは元のクォークに引っ張られる力の方が強くなり，この対を引き離すので紐がちぎれる．真空からクォーク対をつくりハドロンをつくる方が，クォークを大きく引き離すよりエネルギー的に得なのである（図9.14）．すなわち，紐は無限に長くなる代わりにばらばらにちぎれてたくさんのハドロンをつくり

だす．これをクォークのハドロン化 (hadronization) という．現在，自由なクォークは単独には取り出せない（クォークの閉じ込め）と信じられているのはこうした理由による．

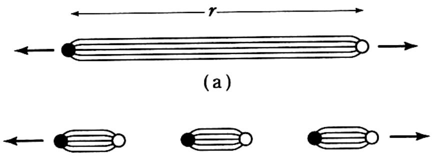


図 9.14 クォーク・反クォーク間にはカラー閉じ込め力により距離に比例したエネルギーが蓄えられ一定のばね定数をもつ紐のように振る舞う．真空からクォーク，反クォーク対をつくり，このクォークと元のクォークが1重項をつくればカラー力はそこで終了する．つまり $r \gtrsim 10^{-13}$ cm 程度以上になると，紐を伸ばすよりは紐を切ってハドロンをつくる方がエネルギー的に得をするので，たくさんのハドロンが生成される．

d. J/ψ の共鳴幅

J/ψ の幅は実験で直接測定できる限界を超えた狭いものである．共鳴があるときの終状態 f への全断面積は

$$e^+e^- \longrightarrow J/\psi \longrightarrow f$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{p^2}\frac{2J+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)}\left(\frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma}\right)\left(\frac{\Gamma_f}{\Gamma}\right)\frac{\Gamma^2/4}{(E-E_R)^2+\Gamma^2/4} \tag{9.60}$$

で与えられる．(Γ_{ee}/Γ), (Γ_f/Γ) は，それぞれ ψ の崩壊で e^+e^- または f へいく分岐比，$s_1=s_2=1/2$ は電子のスピンで，$J=1$ である．実際に観測される断面積は上式に実験の精度 σ_E の幅をもつガウス誤差曲線でなましたものである．通常は $\Gamma \gg \sigma_E$ であるので，(9.60) の形をほぼ忠実に再現するが，Γ が実験のエネルギー測定精度 σ_E（いまの場合，$\sigma_E/E \simeq 0.1$ % で，$\sigma_E \simeq 3$ MeV $\gg 63$ KeV）より小さいときは誤差曲線そのものを見ていることになる（図 9.15）．この場合は (9.60) をエネルギーで積分した，

$$\int_0^\infty \sigma(E)\mathrm{d}E = \frac{3\pi^2}{2p_R^2}\left(\frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma}\right)^2\Gamma \tag{9.61}$$

が，観測された共鳴曲線図（図 9.9 (a)）の山の全面積に等しいはずである．ただし，p_R は共鳴点での運動量 (1548 MeV) である．分岐比 $(\Gamma_{ee}/\Gamma)=0.0627$ は実測できるので，データと比較して，$\Gamma=86\pm6$ KeV，また $\Gamma_{ee}=5.36\pm0.29$

KeV を得る．$\Gamma=86$ KeV という値がいかに小さい値か，通常のハドロンと比較すると，

$$\rho: M=768\ \mathrm{MeV},\quad \Gamma_\rho=152\ \mathrm{MeV},\quad \Gamma_{\rho\to \mathrm{ee}}=6.8\ \mathrm{KeV}$$
$$\omega: M=782\ \mathrm{MeV},\quad \Gamma_\omega=8.4\ \mathrm{MeV},\quad \Gamma_{\omega\to \mathrm{ee}}=0.6\ \mathrm{KeV}$$
$$\phi: M=1019\ \mathrm{MeV},\quad \Gamma_\phi=4.4\ \mathrm{MeV},\quad T_{\phi\to \mathrm{ee}}=1.37\ \mathrm{KeV} \qquad (9.62)$$

であり，$\Gamma_\psi \simeq \Gamma_{\rho\to \mathrm{ee}} \ll \Gamma_\rho,\ \Gamma_\omega,\ \Gamma_\phi$ であることがわかる．

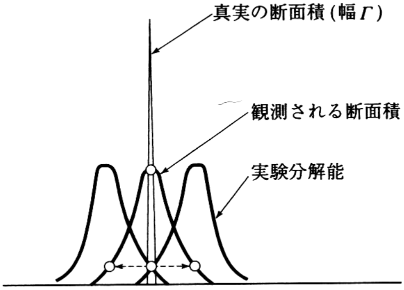


図 9.15　誤差の大きさ $\sigma \gg$ 共鳴幅 Γ のときは，共鳴付近で誤差 σ で決まる幅の山しか観測できない．

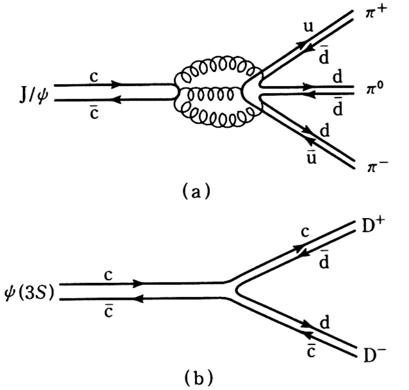


図 9.16　(a) $\mathrm{J}/\psi \to 3\pi$ はクォーク線が一度切れるが，(b) $\psi(3S) \to \mathrm{D}\overline{\mathrm{D}}$ はクォーク線が連結している．OZI (大久保-ツヴァイク-飯塚) 則により (a) の過程は抑圧される．

e．OZI (大久保-ツヴァイク-飯塚) 則

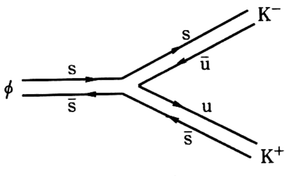
J/ψ が発見されたとき，世間を驚かせたのは，共鳴幅 Γ が非常に小さかったことによる．J/ψ の実測された幅は 86 ± 6 KeV である．~3 GeV 付近の共鳴は，p, n, Λ, K, π などよりはるかに大きい質量をもつから，何らかの選択則が働かない限り強い相互作用でこれらの粒子群に崩壊し，他の不安定粒子と同程度の $\Gamma\sim O(100\ \mathrm{MeV})$ を与えるはずである．実際，図 9.11 に示したレベルの中で $\psi(3S)(3770)$ より上のレベルでは，崩壊幅が MeV の程度になっている．すなわち，$\psi(3S)(3770)$ は，強い相互作用で新粒子 D とその反粒子の $\overline{\mathrm{D}}$ に崩壊する．一方，D ($\overline{\mathrm{D}}$) 粒子自身は準安定である．

$$\psi(3S)(3770) \longrightarrow \overline{\mathrm{D}}+\mathrm{D}$$
$$M(\psi(3S)) > 2M(\mathrm{D}^0),\ 2M(\mathrm{D}^\pm) \qquad (9.63)$$

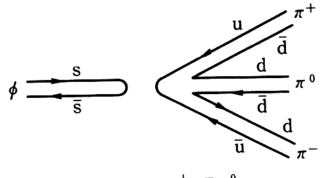
$$M(\mathrm{D}^0)=1864.5\pm0.6\ \mathrm{MeV},\quad \tau(\mathrm{D}^0)=4.28\pm0.11\times10^{-13}\ \mathrm{sec}$$
$$M(\mathrm{D}^\pm)=1869.3\pm0.6\ \mathrm{MeV},\quad \tau(\mathrm{D}^\pm)=10.69\pm0.34\times10^{-13}\ \mathrm{sec}$$

これらの事実は，チャーモニウムがこれまで知られているu, d, sクォークでできているとすると説明がつかない．新しいクォーク $c\bar{c}$ でできていると考えると理解できる．D粒子は質量が～2 GeVあるにもかかわらず準安定である事実は，チャームという強い相互作用では保存される新しい量子数 C を考え，チャームクォークがそれを担っていると考えると説明できる．D粒子が準安定なのは，D粒子がチャーム量子数をもつ最も軽いハドロンであり，強い相互作用ではそれ以上崩壊できないが，チャーム量子数保存を破る弱い相互作用でなら崩壊できるからである*7)．一連の新粒子群 ψ_c, χ は $c\bar{c}$ の束縛状態とすればチャーム数は0で，$\psi_c\to3\pi$ などの反応では一応チャーム数は保存するものの，クォーク線を描くといったんチャームクォークの線（c線）を閉じなければならないことがわかる（図9.16 (a)）．これに反して $\psi(3S)(3770)$ の崩壊幅が大きいのは，c線が連続な過程（図9.16 (b)）が可能だからである．

このようにクォーク線がつながっている反応は切れている反応に比べてはるかに起こりやすいという選択則は，OZI則（Okubo-Zweig-Iizuka Rule）と呼



(a) $\phi\to K^+K^-$



(b) $\phi\to\pi^+\pi^-\pi^0$

図9.17 (a) $\phi\longrightarrow K^+K^-, K^0\overline{K}^0$, (b) $\phi\longrightarrow 3\pi$

*7) D粒子の寿命～10^{-13}秒は，K_s や Σ などの寿命～10^{-10}秒に比べて短いようにみえるが，寿命の長さは，親の質量を M として，～M^{-5} 依存性をもつので（第10章（10.105）参照），$(M_K/M_D)^5\sim10^{-3}$ を考量すれば，同じ弱い相互作用が働いていると結論できる．

ばれ，チャームの発見以前より，uds クォーク物理の経験則として知られていた．例えば，ϕ は理想混合でほぼ純粋な $s\bar{s}$ 状態として知られる．ϕ の崩壊(図 9.17) は，分岐比を BR (branching ratio) として，

$$\mathrm{BR}(\phi \to \mathrm{K^+K^-}+\mathrm{K^0\overline{K}^0})=84\,\%;\quad \mathrm{BR}(\phi \to 3\pi)=14.8\,\%$$

で，KK 崩壊モードの方が圧倒的に大きい．

演習 9.10 実験的に $\sigma(\mathrm{K^-p} \to \phi\Lambda) \simeq 100\sigma(\pi^-\mathrm{p} \to \phi\mathrm{n})$ である．クォーク図を描き，OZI 則が適用されることを示せ．

J/ψ や $\psi(3686)$ が安定なのは，$M(\mathrm{J}/\psi)<2M_\mathrm{D}$ であって，OZI 則を満たす過程が存在しないからである．今日われわれが知っている言葉 (QCD) でいうと，クォーク線が切れるところはグルーオンでつながっている．グルーオンを 1 個放出するたびに結合定数 g ($\alpha_s/2\pi \sim 0.1$, $\alpha_s=g^2/4\pi$) の因子分だけ振幅が小さくなる*8)．J/ψ の場合は実はグルーオンが 3 個放出されている (演習 9.11)．したがって，通常の強い崩壊に比べて，$(g^2)^3 \sim (0.1)^3$ も抑圧される．

演習 9.11 図 9.16 (a) のような $\mathrm{J}/\psi \to 3\pi$ で，グルーオンが最低 3 個は放出される理由を示せ．

9.5.3 チャーム粒子の寿命

$\mathrm{D^0}$ が $c\bar{u}$ でできているとすると，D の崩壊モードは例えば，$\mathrm{D^0} \to \mathrm{e^+}+$anything (分岐比 7.7 %) を，図 9.18 のように $\mathrm{c} \to \mathrm{s}+\mathrm{e^+}+\nu$ と見なせば，質量以外は $\mu \to \mathrm{e^+}+\nu_\mathrm{e}+\nu_\mu$ と全く同じである．μ の寿命 τ_μ は $\propto (G_\mathrm{F}{}^2 m_\mu{}^5)^{-1}$ であるので D の寿命はだいたい

$$\begin{aligned}\tau_\mathrm{D} &\sim \mathrm{BR}(\mathrm{D} \to \mathrm{e^+X})(m_\mu/m_\mathrm{c})^5\tau_\mu \\ &\sim 0.077\times(0.1/1.5)^5\times 2.2\times 10^{-6}\mathrm{sec} \sim 2\times 10^{-13}\,\mathrm{sec} \qquad (9.64)\end{aligned}$$

となり，実験値 $\tau_\mathrm{D}(\exp)=4.21\pm 0.10\times 10^{-13}$ sec とオーダーは合う．すなわち，D メソンは，弱い相互作用で崩壊することが確認できた．

*8) 実 (質量殻上) のグルーオンは，いったん放出されると 100 %ハドロン化すると考えるので，1 個放出するたびに g がかかる．仮想グルーオンの場合は再びクォークに吸収されるので，1 個交換するたびに g^2 の因子がかかる．

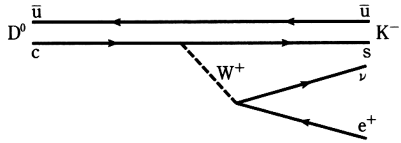


図 9.18 $D^0 \longrightarrow K^- + e^+ + \nu$
$\bar{u}$ をスペクテーター（反応に関与しない傍観者）とすれば，D 崩壊反応を，c クォークの崩壊反応 $c \to s + e^+ + \nu$ と見なせる．

9.5.4 チャームスペクトロスコピー：$SU(4)$

第 4 番目のクォーク c が存在するならば，u, d, s による $SU(3)$ 対称は $SU(4)$ に拡張される*9)．しかし，チャームクォークの質量は約 1.5 GeV で，他の三つのクォークに比べ圧倒的に大きいので，$SU(4)$ 対称は良い対称性であるとは考えられていない．それでも，c クォークを含むハドロンの分類や存在の予言に関しては，$SU(4)$ は有力な武器となる．以下に $SU(4)$ による分類法について若干述べる（付録 F)．

チャームメソン：

$$\mathbf{4} \otimes \mathbf{4}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{15} \tag{9.65}$$

15 の中のうち c クォークを含まないもの（8 重項）はすでに $SU(3)$ でわかっているので，c クォークを含むメソン（量子数 C で表す）は，

$$\begin{aligned} &J^P = 0^- \text{ の場合} \\ &C=1: \quad D^0(c\bar{u}),\ D^+(c\bar{d}),\ D_s(c\bar{s}) \\ &C=0: \quad \eta_c \sim (c\bar{c}) \\ &C=-1: \quad \bar{D}^0(\bar{c}u),\ D^-(\bar{c}d),\ \bar{D}_s(\bar{c}s) \end{aligned} \tag{9.66}$$

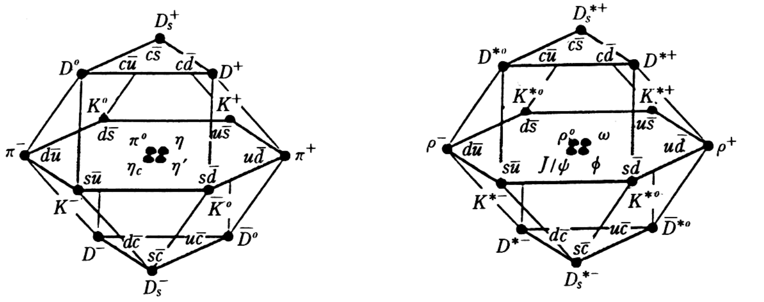
で，1^- についても同様である．これを I_3-Y-C 座標で立体的に表すと図 9.19 のようになる．すべて発見されている．

*9) 実は，チャームクォークは，4 元坂田モデルとして日本ではすでに 1960 年に提唱されていた[20]．しかし，チャームクォークが，ストレンジネスの変わる中性カレント現象の抑圧（GIM メカニズム）に有効との提案がでる 1970 年まで，日本以外ではあまり注目されなかった．さらに，丹生らは飛行機に搭載したエマルションで，崩壊寿命 $\sim 10^{-14}$ 秒程度の寿命の短い粒子を宇宙線反応で見つけており[21]，名古屋グループがこれをチャーム粒子として解析していたことは注目に値する．ただし，宇宙線現象であるため事象数が非常に限られており，粒子同定も十分でなかったため加速器による発見の影に隠れてしまったことは残念であった．

チャームバリオン：$J^P=(1/2)^+$ の場合

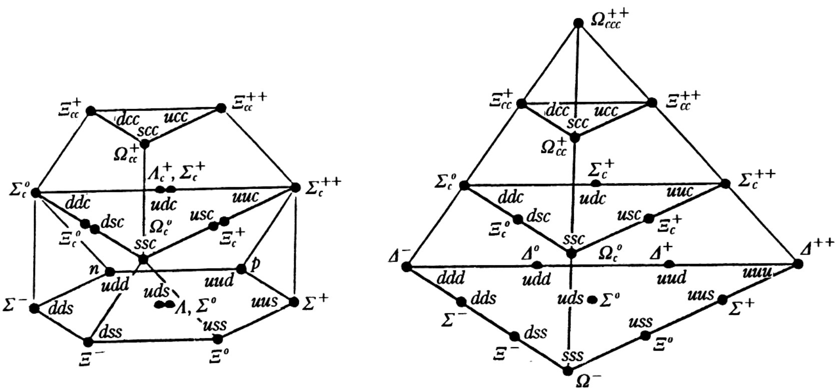
$$\mathbf{4}\otimes\mathbf{4}\otimes\mathbf{4}=\mathbf{4}_{\mathrm{A}}\oplus\mathbf{20}_{\mathrm{MA}}\oplus\mathbf{20}_{\mathrm{MS}}\oplus\mathbf{20}_{\mathrm{S}}$$

であり，混合対称の **20** が，$SU(3)$ の 8 重項に，全対称の $\mathbf{20}_{\mathrm{S}}$ が 10 重項に対応する．したがって $1/2^+$ のチャームバリオンが 12 個，$3/2^+$ のチャームバリオンが 10 個存在するはずである（図 9.20 (a), (b)）．$\Lambda_c^+, \Sigma_c, \Xi_c$ などが発見されている．



(a) (b)

図 9.19 $SU(4)$ による 0^- (a), 1^- (b) メソン多重項[24]
真中の平面がチャーム量子数 C=0 のメソンで η_c，J/ψ 以外は $SU(3)$ で実現される多重項．下の平面が $\bar{c}$，上の平面が c を含むメソンを表す．



(a) (b)

図 9.20 $SU(4)$ による $(1/2)^+$ の 20 重項 (a) と $(3/2)^+$ の 20 重項 (b) のバリオン多重項
一番下の平面が C を含まないバリオンで $SU(3)$ で実現される．

9.6 第5のクォークb

チャーム発見と全く同じような経過をたどり，まず1977年にアメリカのフェルミ研究所[22]で，ウプシロン (Υ)

$$p+p \longrightarrow \Upsilon + x$$
$$\hookrightarrow \mu\mu$$

が，次いで1979年ドイツのDESY (Deutsche Elektronen Synkrotron)[23]で

$$e^{+}+e^{-} \longrightarrow \Upsilon(9460),\ \Upsilon'(10023), \Upsilon''(10355), \Upsilon'''(10580)$$

および付随する一連のレベルが発見された (図9.21).

このレベルはチャーモニウムレベルと全く同じように説明される．ただし，bクォークの質量が~5 GeVと大きくなったのに伴って，束縛状態がポテンシャルの深いところに形成され，Υ(3S)までが準安定となっている．これまでに発見されたbクォークを含むハドロンに関しては，粒子表[24]を参照.

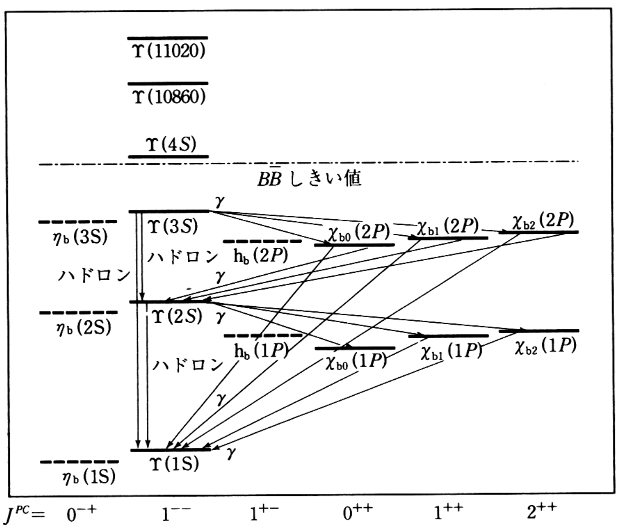


図9.21 ボトムニウムのレベル図[24]
実線はデータが確立しているもの.

9.7　ハドロンの質量公式

9.7.1　水素原子の準位

これまでの考察からクォークに働くカラー力は，少なくとも束縛状態が問題になるような小さな距離では，クーロン力によく似ていることがわかった．そこでカラー力を理解するために，最もよく知られているクーロン力による束縛状態，水素原子のレベル構造を再考してみよう（図 9.22)．これはディラック方程式を解いて得られるものである．主要レベルは，量子力学で学んだように中心力 α/r をポテンシャルとしてもつシュレーディンガー方程式を解けば

$$E_n = -\frac{\alpha^2}{2}\frac{\mu}{n^2} \tag{9.67}$$

で与えられる ($n=1, 2, \cdots$)．μ は実効質量である．この場合 $(2S, 2P)$, $(3S, 3P, 3D), \cdots$ が縮退しているが，スピン-軌道角運動量相互作用（LS 力）によ

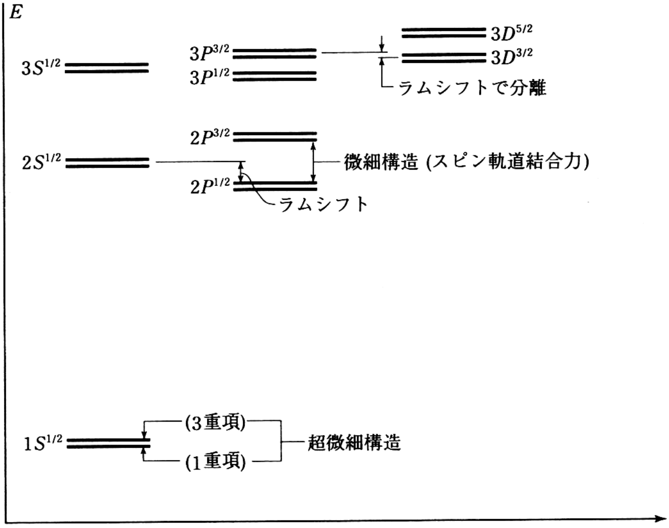


図 9.22　水素原子のレベル構造[25)]

クーロン力のみのときは $2S$-$2P$, $3S-3P$-$3D$ レベルは縮退している．スピン軌道結合力により微細構造 (fine structure) が生じ，スピン-スピン結合力により超微細構造 (hyperfine structure) が生じる．また $2S^{1/2}-2P^{1/2}$ 間のレベル差はラムシフトを表す．

り分かれる (fine structure；微細構造)．さらにスピン-スピン相互作用により各レベルがさらに二つのレベルに分解する (hyperfine structure；超微細構造)．LS 力は電子が軌道回転運動することにより生じる磁気モーメント μ_L と，電子の固有磁気モーメント μ_e による磁気相互作用のことで，ハミルトニアンは

$$H_{LS} \sim -\boldsymbol{\mu}_L \cdot \boldsymbol{\mu}_e = -\left(\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L}\right)\cdot\left(g_e \frac{e}{2m_e}\boldsymbol{s}\right) \sim -\frac{\alpha}{m_e{}^2}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{s} \quad (9.68)$$

スピン-スピン相互作用は，陽子と電子の固有磁気能率どうしによる磁気相互作用で，

$$H_{ss} \sim -\boldsymbol{\mu}_e \cdot \boldsymbol{\mu}_p = \left(g_e \frac{e}{2m_e} s_e\right)\cdot\left(g_p \frac{e}{2m_p} s_p\right) \sim \frac{\alpha}{m_e m_p}\boldsymbol{s}_e \cdot \boldsymbol{s}_p \quad (9.69)$$

のように表される．相互作用している粒子のスピン成分を交換する働きをもつのでスピン交換力ともいう．これは力の媒介粒子フォトンがスピンをもつことが原因で起きる．これからわかるように微細構造と超微細構造のレベル間隔の大きさの差は，電子と陽子の質量で決まっていることがわかる．実際ポジトロニウムも水素と全く同じ構造を示すが，$m_p \rightarrow m_e$ であるので，LS 力と SS 力は同程度のエネルギー分離を与える．量子力学で超微細構造を計算すると[25)]

$$E_{ss} = \frac{8\pi}{3}\frac{e_i e_j}{m_i m_j}|\psi(0)|^2 \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j \quad (9.70)$$

となる．$\psi(0)$ は波動関数の原点における値である．

$$\boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j = \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{s}_j)^2 - \boldsymbol{s}_i{}^2 - \boldsymbol{s}_j{}^2\} \sim s(s+1) - s_i(s_i+1) - s_j(s_j+1)$$

s は，i と j のスピン和である．$s_i = s_j = 1/2$，$s=0$ または 1 であるのでポジトロニウムの基底状態はスピン 0 をもつことがわかる．

9.7.2 カラー交換力

原子から原子核に進み，核力を考察するとポテンシャルの基本的な形は同じであるが交換力が加わる．これは力が働くことによって，$(p \leftrightarrow n)$ のように電荷が移行することを意味する．p-p, p-n, n-n の組み合わせで束縛状態の重水素 D をつくるのは，$I=0$ 状態 $(|I=I_3=0\rangle = (pn - np)/\sqrt{2})$ のみであり，このことは，$I=0$ と 1 とではエネルギーレベルに差があることを示している．こ

れに対しては，スピン交換力との類推で，アイソスピン交換力 ($H \sim \boldsymbol{I}_a \cdot \boldsymbol{I}_b$) を取り入れることにより説明がつく (別の言葉で言うと，核力の媒介粒子である π が電荷を担うことが交換力の，π がアイソスピンをもつことがアイソスピン交換力の原因の一つである)．核子はアイソスピン 1/2 をもつのでアイソスピンに起因するレベルは，I の固有値により

$$H_{II} \sim 2(\boldsymbol{I}_a \cdot \boldsymbol{I}_b) = (\boldsymbol{I}_a + \boldsymbol{I}_b)^2 - \boldsymbol{I}_a{}^2 - \boldsymbol{I}_b{}^2$$
$$= I(I+1) - 2 \times 3/4 = \begin{cases} -3/2 & I=0 \\ 1/2 & I=1 \end{cases} \qquad (9.71)$$

のように分かれる．($\boldsymbol{I}_a \cdot \boldsymbol{I}_b$) の前の因子 2 は，計算の便宜のためで深い意味はない．アイソスピン交換力の係数が正であれば，$I=0$ は引力を $I=1$ は斥力を与える．2 体力がアイソスピンおよびスピン交換により生じるのであれば，

$$H_{EX} \sim (\boldsymbol{I}_a \cdot \boldsymbol{I}_b)(\boldsymbol{s}_a \cdot \boldsymbol{s}_b)$$

のようになるであろう．

さて，カラー力はカラーをもつスピン 1 のグルーオン交換により生じるから，カラー $SU(3)$ の演算子を $\boldsymbol{F}(=(F_1, F_2, \cdots, F_8))$ として，

$$H_{EX} \sim (\boldsymbol{F}_a \cdot \boldsymbol{F}_b)(\boldsymbol{s}_a \cdot \boldsymbol{s}_b)$$
$$\boldsymbol{F}_a \cdot \boldsymbol{F}_b \equiv \sum_i^8 F_{ai} F_{bi}, \qquad \boldsymbol{s}_a \cdot \boldsymbol{s}_b \equiv \sum_i^3 s_{ai} s_{bi}$$

が期待される．ここに指標 a, b は粒子番号であり，指標 i は，カラーベクトル空間 (8 次元) の指標で，F_i は i 番目の群の表現行列を意味する (付録 F.10)．これを水素原子の相互作用と比較すれば，3 種のカラー荷によるカラー磁気モーメント (μ_c) 相互作用であると解釈づけられるから，ハミルトニアンは次のような形をとるであろう[26]．

$$H = H_0 - A \sum_{ij} \frac{\alpha_s}{m_i m_j} (\boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{F}_j)(\boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j) \qquad (9.72)$$

ここに，$\sum_{ij}$ は，ハドロンの中のクォークについての和であり，m_i はクォークの質量である．上式では基底状態に限ったので軌道角運動量 $L=0$，したがって LS 力はなく，また H_0 は中心力に対応する閉じ込めの力を与えると考える．

($\boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{F}_j$) は

$$(\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{F}_j)=\{(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_j)^2-\boldsymbol{F}_i^2-\boldsymbol{F}_j^2\}/2 \tag{9.73}$$

のように $SU(3)$ のカシミヤ演算子で書ける．メソンはカラー1重項であるので，$\boldsymbol{F}_{ij}=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_j$ の演算する2粒子系は **1** に属する．バリオンの場合は，3個のクォークのうちの2個に演算するが，残りのクォーク (**3**) と組み合わせて **1** をつくるのでクォーク対は $\mathbf{3}^*$ に属する．右辺第2第3項の $\boldsymbol{F}_i$ の演算対象は1粒子であり，これは常に **3** または $\mathbf{3}^*$ に属するから，付録Fの (F.50) 式を参照すれば，

$$(\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{F}_j)=\begin{cases}-4/3 & \text{メソン}\\ -2/3 & \text{バリオン}\end{cases} \tag{9.74}$$

クォークの質量が縮退しているとすれば ($m_{\mathrm{u}}=m_{\mathrm{d}}=m_{\mathrm{s}}$)，スピン成分の和がとれるので，スピン行列は容易に計算できて，メソンの場合は

$$(\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_j)=\begin{cases}-3/4 & 0^-\\ 1/4 & 1^-\end{cases} \tag{9.75}$$

バリオンの場合は

$$(\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_j)=\begin{cases}-3/4 & 1/2^+\\ 3/4 & 3/2^+\end{cases} \tag{9.76}$$

となる．したがって，質量値 M にはスピンによる差が現れる．上の計算では，$M(1^-)>M(0^-)$, $M(3/2)>M(1/2)$ を与え，かつ質量分離の割合は，

$$M(1^-)-M(0^-)>M(3/2)-M(1/2) \tag{9.77}$$

となっていて，実験データと合っている．カラー交換因子がないとメソンとバリオンのそれぞれの質量レベルは逆転し観測と合わない．

演習 9.12 (9.75), (9.76) を導け．

ハドロンの質量やクォークの質量が束縛エネルギーに比べて大きい (非相対論近似) と考えると，ハドロンの質量は第0近似 ((9.72) の H_0 項) では，構成要素のクォークの質量の和で表されると考えてよいから，

$$M(\text{バリオン})=m_1+m_2+m_3+B\left[\frac{(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2)}{m_1m_2}+\frac{(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{s}_3)}{m_2m_3}+\frac{(\boldsymbol{s}_3\cdot\boldsymbol{s}_1)}{m_3m_1}\right]$$

$$=\sum m_i+\sum_{ij}\frac{B}{m_im_j}(\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_j) \tag{9.78}$$

$$M(\text{メソン})=m_1+m_2+\frac{C}{m_1m_2}(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2) \tag{9.79}$$

とおけるであろう．バリオンには $(1/2)^+$ の 8 重項と $(3/2)^+$ の 10 重項があり，アイソスピン縮退を考えると 8 種類のレベルがある．

ここでは s クォークを 1 個含む $\Lambda(1/2)$-$\Sigma(1/2)$-$\Sigma^*(3/2)$ 系を例にとって M(バリオン) を計算してみよう．$1=\mathrm{s}$, $2,3=\mathrm{u,d}$ とすれば，$m_2=m_3=m_\mathrm{u}=m_\mathrm{d}$, $m_1=m_\mathrm{s}$ である．クォーク 2, 3 は $I=1(\Sigma,\Sigma^*)$, $I=0(\Lambda)$ をつくるので，香りとスピンで波動関数を全対称にするためには，それぞれ $s=1\,(I=1)$, $s=0\,(I=0)$ でなければならない．

$$\sum_{ij}\frac{(\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_j)}{m_im_j}=\left[\frac{(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{s}_3)}{m_\mathrm{u}^2}+\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot(\boldsymbol{s}_2+\boldsymbol{s}_3)}{m_\mathrm{u}m_\mathrm{s}}\right] \tag{9.80}$$

$$2(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{s}_3)=(\boldsymbol{s}_2+\boldsymbol{s}_3)^2-\boldsymbol{s}_2^2-\boldsymbol{s}_3^2=s_{23}(s_{23}+1)-3/2$$

であるので，

$$(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{s}_3)=\begin{cases}1/4 & s_{23}=1 \quad (\Sigma,\Sigma^*)\\ -3/4 & s_{23}=0 \quad (\Lambda)\end{cases} \tag{9.81}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}_1\cdot(\boldsymbol{s}_2+\boldsymbol{s}_3)&=(1/2)\{\boldsymbol{s}^2-\boldsymbol{s}_1^2-(\boldsymbol{s}_2+\boldsymbol{s}_3)^2\}\\&=(1/2)\{s(s+1)-3/4-s_{23}(s_{23}+1)\}\end{aligned}$$

$$s(s+1)=\begin{cases}15/4 & s=3/2 \quad (\Sigma^*)\\ 3/4 & s=1/2 \quad (\Sigma,\Lambda)\end{cases} \tag{9.82}$$

$$s_{23}(s_{23}+1)=\begin{cases}2 & s_{23}=1 \quad (\Sigma,\Sigma^*)\\ 0 & s_{23}=0 \quad (\Lambda)\end{cases} \tag{9.83}$$

であるので，

$$\boldsymbol{s}_1\cdot(\boldsymbol{s}_2+\boldsymbol{s}_3)=\begin{cases}1/2 & (\Sigma^*)\\ -1 & (\Sigma)\\ 0 & (\Lambda)\end{cases} \tag{9.84}$$

となる．結局

$$m(\Sigma^*)=2m_\mathrm{u}+m_\mathrm{s}+B\left(\frac{1}{4m_\mathrm{u}^2}+\frac{1}{2m_\mathrm{u}m_\mathrm{s}}\right) \tag{9.85}$$

$$m(\Sigma)=2m_\mathrm{u}+m_\mathrm{s}+B\left(\frac{1}{4m_\mathrm{u}^2}-\frac{1}{m_\mathrm{u}m_\mathrm{s}}\right) \tag{9.86}$$

$$m(\Lambda)=2m_u+m_s+B\left(-\frac{3}{4}\frac{1}{m_u^2}\right) \tag{9.87}$$

が導けた．他のバリオンも同様に計算して，

$$m(\Delta)=3m_u+B\left(\frac{3}{4}\frac{1}{m_u^2}\right) \tag{9.88}$$

$$m(\mathrm{N})=3m_u+B\left(-\frac{3}{4}\frac{1}{m_u^2}\right) \tag{9.89}$$

$$m(\Xi^*)=m_u+2m_s+B\left(\frac{1}{2m_u m_s}+\frac{1}{4m_s^2}\right) \tag{9.90}$$

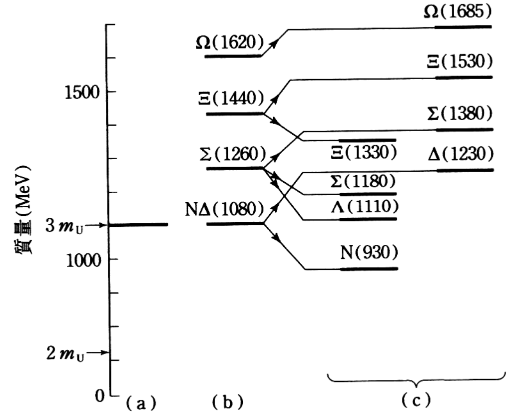


図 9.23 スピン-スピン結合力によって，各バリオン間のレベル移行が生じる[18)]
(a) では $3m_u$ ですべてが縮退している．
(b) ではクォーク質量 m_s の数による差が生じる．
(c) がスピン-スピン結合力によるレベルの分化．

表 9.5

バリオン	計算値	実験値	メソン	計算値	実験値	
Ω	1682	1672	ϕ	1032	1020	バリオンの場合 $m_u=m_d=363$ MeV $m_s=538$ MeV $B=200m_u^2$ MeV
Ξ*	1529	1533	K*	896	892	
Σ*	1381	1384	ω	780	783	
Δ	1239	1232	ρ	780	776	メソンの場合 $m_u=m_d=310$ MeV $m_s=483$ MeV $C=640m_u^2$ MeV
Ξ	1327	1318	η	559	549	
Σ	1179	1193	K	485	496	
Λ	1114	1116	π	140	138	
N	939	939				

$$m(\Xi)=m_{\mathrm{u}}+2m_{\mathrm{s}}+B\left(-\frac{1}{m_{\mathrm{u}}m_{\mathrm{s}}}+\frac{1}{4m_{\mathrm{s}}^2}\right) \tag{9.91}$$

$$m(\Omega)=3m_{\mathrm{s}}+B\left(\frac{3}{4}\frac{1}{m_{\mathrm{s}}^2}\right) \tag{9.92}$$

上記8個の式に対して，パラメターは3個である．メソンも同様にして，計算できる．実験値と比べた結果を図9.23と表9.5に示す．

演習 9.13　バリオンの他の式 (9.88)～(9.92) を導け．

演習 9.14　メソンについても同様に計算せよ

メソンとバリオンではクォークの質量値がかなり異なるように見えるが，式の簡単さを考えれば，驚くほどよく合っているといえるだろう．なおバリオンの磁気能率から決めたクォークの質量は (9.48) $m_{\mathrm{u}}=338$ MeV, $m_{\mathrm{d}}=322$ MeV, $m_{\mathrm{s}}=510$ MeV で，ちょうど両者の中間にある．これらの質量公式は，$\Delta m=m_{\mathrm{s}}-m_{\mathrm{u}}$ の展開の1次でみる限り，ゲルマン-大久保の質量公式の $SU(6)$ への拡張[27)]

$$M=A+BY+C\left[I(I+1)-\frac{Y^2}{4}\right]+DS(S+1) \tag{9.93}$$

に一致する．

軌道角運動量 $L\neq 0$ の励起状態の質量を計算するには，(9.72) のスピン交換力のみでは不十分で，たとえば次のようなハミルトニアンを使う[26)]．

$$H=L(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)+\sum\left(m_i+\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m_i}\right)-\frac{2}{3}\alpha_{\mathrm{s}}\sum S_{ij} \tag{9.94}$$

$$\begin{aligned}S_{ij}=&\frac{1}{r}-\frac{1}{2m_im_j}\left[\frac{\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_j}{r}+\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_i)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_j)}{r^3}\right]-\frac{\pi}{2}\delta^3(r)\left(\frac{1}{m_i^2}+\frac{1}{m_j^2}\right)\\&-\frac{1}{m_im_j}\left\{\frac{8\pi}{3}(\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_j)\delta^3(r)+\frac{1}{r^3}[3(\boldsymbol{s}_i\cdot\hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{s}_j\cdot\hat{\boldsymbol{r}})-(\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_j)]\right\}\\&-\frac{1}{2r^3}\left\{\frac{1}{m_i^2}(\boldsymbol{l}_i\cdot\boldsymbol{s}_i)-\frac{1}{m_j^2}(\boldsymbol{l}_j\cdot\boldsymbol{s}_j)+\frac{2}{m_im_j}[(\boldsymbol{l}_i\cdot\boldsymbol{s}_j)-(\boldsymbol{l}_j\cdot\boldsymbol{s}_i)]\right\}\\&+\cdots\cdots\ \text{(相対論的補正項)}\end{aligned} \tag{9.95}$$

ただし，$\hat{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ である．(9.94) の第1項は閉じ込めの力（現象論的クォークモデルでは，調和振動子ポテンシャルが使われる)，第2項が質量と運動エネルギー，第3項 S_{ij} が核力でよく使われるブライト (Breit) 相互作用と呼ばれる項である[28)]．ブライト項 (9.95) の中の1行目第2項はダーウィ

ン (Darwin) 項と呼ばれ，1行第3項がZitterbewegung項，第2行がスピン-スピン相互作用項，第3行がスピン-軌道角運動量項である．

ただし，現象論的にはスピン-軌道角運動量を無視し，スピン-スピン相互作用項を取り入れることで，バリオンの質量レベルや崩壊幅が非常によく再現できることがわかっている．先のハドロンレベルの議論で，$L=0$ のバリオンの質量計算には，スピン-スピン相互作用の中の第1項を使用した．図9.24に $L=1$，負のパリティに対応するバリオン励起状態 ($J^P(SU(6)\times O(3))$ 表示では $(1/2)^-(70,1^-)$) のスペクトルの観測値と理論計算値を示す[29]．データは19点あるが，$\Lambda^*(1/2)^-$ を唯一の例外として，見事に再現していることがわかる．使ったパラメターの数は5個である．

なぜ，非相対論的なポテンシャルモデルが，かくも見事にデータを再現するのか[30]，またクォーク質量が~300 MeVで，散乱などの力学現象から求められるクォーク質量（カレント質量という．数MeV程度の大きさ）と大きく異なるのかは必ずしも明らかではないが，ハドロンスペクトルにおける現象論的な成功は，クォークモデルの正しさを裏付ける強力な証拠と見なせる．

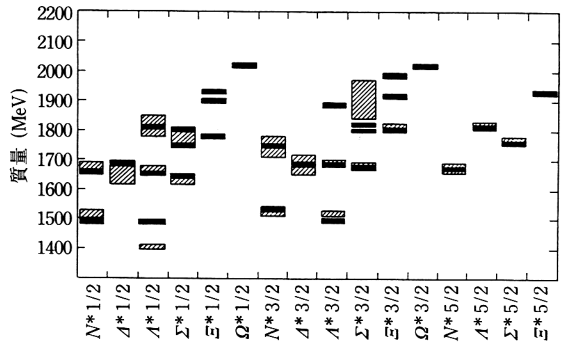


図 9.24 クォークモデルによる負パリティバリオンの質量予想値と実験値の比較[29]
斜線部が実験データによる共鳴の質量値で，太い実線が計算値を示す．

参考文献

1) G.D. Rochester and C.C. Butler : *Nature*, **160** (1947) 855

2) S. Sakata : *Prog. Theor. Phys.*, **16** (1956) 686
3) M. Ikeda, S. Ogawa, Y. Ohnuki : *Prog. Theor. Phys.*, **22** (1959) 715
4) M. Gell-Mann : *Phys. Rev.*, **125** (1962) 1067
5) Y. Ne'eman : *Nucl. Phys.*, **26** (1961) 222
6) M. Gell-Mann : *Phys. Rev., Lett.* **8** (1964) 214
7) 彼はエースと名付けた, G. Zweig : CERN Rep. No. 8182/Th401, 8419/Th412 (1964)
8) S. Okubo : *Prog. Theor. Phys.*, **27** (1962) 949
9) V.E. Barnes *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **12** (1964) 204
10) 例えば, 河原林 研 : 素粒子のカイラル対称性, 物理学最前線 5, 共立出版 (1983)
11) 例えば, 矢崎茂夫 : OZI 則, 物理学最前線 7, 共立出版 (1984)
12) M. Han and Y. Nambu : *Phys. Rev.*, **139B** (1965) 1006
13) TASSO ; M. Althoff *et al.* : *Z. Phys.*, **C22** (1984) 307
14) J. Lach : Fermilab-Conf-90/238, Proc. 9th Int. Symp. on High Energy Spin Phys., Bonn, Germany, Sept. 10-15 (1990)
15) L.R. Landau : Proc. LP-HEP Conf. Geneva, July (1991)
16) J.J. Aubert *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974) 1404
17) J.E. Augustin *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974) 1406
18) F.E. Close : An Introduction to Quarks and Leptons, Academic Press (1974) p. 372
19) C.B. Chiu : *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **22** (1972) 255
20) Z. Maki *et al.* : *Prog. Theor. Phys.*, **23** (1960) 1174
21) K. Niu *et al.* : *Prog. Theor. Phys.*, **46** (1971) 1644
22) Innes *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **39** (1977) 1240
23) Berger *et al.* : *Z. Phys.*, **C1** (1979) 347
24) PDG ; Review of Particles, *Phys. Rev.*, **D45** (1992) 1, **D54** (1996)
25) 例えば, Bjorken, Drell : Relativistic Quantum Mecahnics
26) De Rujula, A.H. Georgi, S.L. Glashow : *Phys. Rev.*, **D12** (1975) 147
27) F. Gursey and L.A. Radicati : *Phys. Rev. Lett.*, **13** (1964) 173
28) 例えば, V.B. Berestetski, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevski : Relativistic Quantum Theory, Part I, Pergamon Press, p. 280
29) N. Isgur and G. Karl : *Phys. Rev.*, **D18** (1978) 4187
30) クォークモデルに基づくスペクトロスコピーについてのレヴューについては, 例えば, A.J.G. Hey and R.L. Kelly : *Phys. Rep.*, **96** (1983) 71

10
弱い相互作用

現在，われわれは物質についてかなり統一整合された描像をもっている．その理由の第1は，物質のクォークとレプトン構造を知ったがためであり，第2は，電弱統一理論の成功により，力の統一や宇宙の始まりについてかなり見通しをたてることが可能になったことである．統一理論は弱い相互作用現象の理論をつくる試みの中から生まれた．1935年に提唱されたフェルミ理論は，現象論としては実によく実験現象を再現したが，理論的には欠陥があった．そこでそれまでに知られていた唯一の整合性のあるゲージ理論であったQEDをモデルに，フェルミ理論を数学的に整合化しようとする試みが統一理論につながったのである．以下では，弱い相互作用の解説を行うが，各段階で電磁力との類似と差異に注目して把握することが統一理論理解への早道となるであろう．

10.1 フェルミ理論

10.1.1 ベータ崩壊

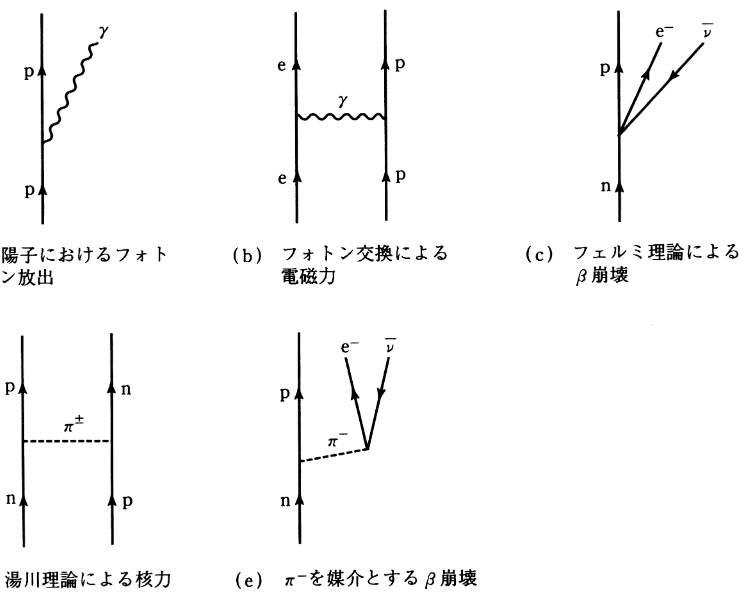
a. ニュートリノ仮説

弱い相互作用は最初β崩壊で発見された．同時に発見されたα崩壊やγ崩壊では，放出された放射粒子のエネルギーが，親原子核と子の原子核のもつエネルギーの差と一致したのでかなり初期から理解するのは容易であった．しかし，β崩壊ではβ線つまり電子のもつエネルギーが連続分布をするのみならず，ほかに余分の粒子が放出される兆候は一切みられなかった．すなわち，エネルギー保存が破れているようにみえたのである．パウリ (W. A. Pauli) は

1931年に，このエネルギーを持ち去る粒子としてのニュートリノ仮説を唱えた．1935年にフェルミ (E. Fermi) がこれを取り入れて最初の弱い相互作用の理論を提唱した．この理論は，よく知られていた電磁相互作用の類推でつくったものである．原子核特にその中の陽子が光 γ を放出する過程（図10.1 (a)）は，相互作用ラグランジアン $\mathscr{L}_\mathrm{I}$ によって，

$$-\mathscr{L}_\mathrm{I}=e\bar{p}\gamma^\mu pA_\mu=ej^\mu A_\mu \tag{10.1}$$

によって記述される*1)．ここに $p, \bar{p}$ は粒子の記号によって，場の量 $\psi_\mathrm{p}(x)$, $\bar{\psi}_\mathrm{p}(x)$ を代表させたものである．場の量子論の解釈では，p が陽子を消滅させ，A_μ によってフォトンを放出すると同時に $\bar{p}$ によって陽子もまた再生成させる．β 崩壊は，原子核内の中性子（陽子）が電子（陽電子）と反ニュートリノ



(a) 陽子におけるフォトン放出　(b) フォトン交換による電磁力　(c) フェルミ理論による β 崩壊

(d) 湯川理論による核力　(e) π^- を媒介とする β 崩壊

図10.1　電磁相互作用，フェルミ理論と湯川理論の考え方の比較

---

*1) 陽子は素粒子ではなく異常磁気能率をもつので，本当は

$$\frac{e}{4m_\mathrm{p}}(g-2)\sigma_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu-\partial^\mu A^\nu)$$

の相互作用をも考慮しないといけないが，推理の出発点として (10.1) を考えたということである．

(ニュートリノ) を放出する過程 (図 10.1 (c))

$$\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{p}+\mathrm{e}^{-}+\bar{\nu}$$

$$\mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{n}+\mathrm{e}^{+}+\nu$$

であるから，n(p) を消滅させて p(n) を発生させ，同時にフォトンの代わりに e^- と $\bar{\nu}$(e^+ と ν) を放出すると考えると，ラグランジアンは，

$$-\mathscr{L}_{\mathrm{I}}=G_{\beta}(\bar{e}\gamma_{\mu}\nu)(\bar{p}\gamma^{\mu}n)+\mathrm{h.c.}=G_{\beta}j_{l}{}^{-}{}_{\mu}j_{h}{}^{+\mu}+\mathrm{h.c.} \tag{10.2}$$

のように表せる．h.c. はエルミート共役を示す．これは 4-フェルミ相互作用と呼ばれる．G_β はフェルミ結合定数と呼ばれ，弱い相互作用の強さを表す量である．この相互作用はカレントの積の形であるので，カレント-カレント結合とも呼ぶ．電磁相互作用のカレントと区別するために弱カレント (weak current) という．カレント成分 j^μ につけた添え字の l と h は，レプトンおよびハドロンの略である．相互作用をする際このカレントは，電荷を ±1 変えるので，荷電カレント (charged current) という言い方をすることもある．この意味で電磁カレントは中性カレントの一種である．

b. 許容遷移

β 崩壊の遷移振幅を得るには，(10.2) のラグランジアンを始状態と終状態で挟んだ

$$T_{\mathrm{fi}}=G_{\beta}\int \mathrm{d}^4x\langle \mathrm{p}|\,\bar{p}(x)\gamma^{\mu}n(x)|\mathrm{n}\rangle\langle \mathrm{e}\,\bar{\nu}\,|\,\bar{e}(x)\gamma_{\mu}\nu(x)|0\rangle \tag{10.3 a}$$

を計算する必要がある．以下，しばらくの間歴史的経緯に従って，クォークモデルを使わず，現象的に陽子と中性子を素粒子的に扱う．陽子と中性子を平面波と考えた場合，核子部分は

$$\langle \mathrm{p}|j^{\mu}|\mathrm{n}\rangle \sim \bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)\mathrm{e}^{-i(p-p')\cdot x} \tag{10.3 b}$$

であり，第 3 章の表 3.2 を参照すると，低エネルギーの極限では $\mu=0$ 成分のみ生き残りかつ 1 に比例することがわかる．

$$\int \mathrm{d}^3x\langle \mathrm{p}|\,\bar{p}(x)\gamma^{\mu}n(x)|\mathrm{n}\rangle \simeq \delta_{\mu 0}u^{\dagger}{}_{\mathrm{p}}u_{\mathrm{n}}\delta^3(\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}})\equiv\delta_{\mu 0}\langle \mathbf{1}\rangle \tag{10.3 c}$$

実際には中性子と陽子は原子核の中にいる．β 崩壊の Q 値はたかだか数 MeV であり，原子核の質量に比べて圧倒的に小さいので原子核の反跳は無視できる．つまり運動量は保存しないと考えてよく，δ 関数の代わりに (10.3 c)

の $\langle \mathbf{1} \rangle$ は，原子核の波動関数でとった期待値と読み替えなければならない．ただし，中性子1個を陽子に変える演算があるので，正確には $\mathbf{1}$ ではなくて τ^+ の期待値である．

電子とニュートリノについては相対論的に取り扱わなければならない．したがって遷移行列は，

$$T_{\mathrm{fi}} = 2\pi\delta(\Delta - E_{\mathrm{e}} - E_\nu) G_\beta \int \mathrm{d}^3x \Phi_{\mathrm{F}}{}^*(x) \Phi_{\mathrm{I}}(x) \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{p}_\nu)\cdot\boldsymbol{x}} \times (\bar{u}(p_{\mathrm{e}})\gamma^0 v(p_\nu)) \tag{10.3 d}$$

$\Phi_{\mathrm{I}}, \Phi_{\mathrm{F}}$：崩壊前後の原子核波動関数

$\Delta = A_{\mathrm{I}} - A_{\mathrm{F}}$：親原子核と子原子核の質量差

$p \lesssim$ 数 MeV であるので，電子とニュートリノのド・ブローイ波長は $\sim 10^{-11}$ cm くらいであり，原子核のサイズ $\sim 10^{-12}$cm より十分大きい．つまり，$(\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{x} \ll 1$ であるので，

$$\mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{p}_\nu)\cdot\boldsymbol{x}} = 1 - i(\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{p}_\nu) \cdot \boldsymbol{x} + \cdots$$

の第2項以下は無視できる．この条件で許される遷移を許容遷移という．原子核遷移の選択則により第1項が効かないときは，第2項以下を考慮する必要があるが（禁止遷移）ここではふれない．

c. *ft* 値

(10.3 d) より崩壊率を計算すると，

$$\mathrm{d}\Gamma = G_\beta{}^2 |\langle \mathbf{1} \rangle|^2 \sum_{\mathrm{spin}} L^{00} 2\pi\delta(\Delta - E_{\mathrm{e}} - E_\nu) \frac{\mathrm{d}^3 p_{\mathrm{e}} \mathrm{d}^3 p_\nu}{2E_{\mathrm{e}} 2E_\nu (2\pi)^6} \tag{10.4 a}$$

$$\sum L^{00} = \sum_{r,s} \bar{u}_r(p_{\mathrm{e}})\gamma^0 v_s(p_\nu)\, \bar{v}_s(p_\nu)\gamma^0 u_r(p_{\mathrm{e}})$$
$$= \mathrm{Tr}[\not{p}_{\mathrm{e}}\gamma^0 \not{p}_\nu \gamma^0] = 4E_{\mathrm{e}}E_\nu[1 + v_{\mathrm{e}} \cos\theta] \tag{10.4 b}$$

v_{e} は電子のもつ速度，θ は ν と電子のなす角である．(10.4 b) は，(A.12) で与えられている．位相空間積分のところは，$E_\nu = p_\nu$ (i.e. $m_\nu = 0$) を使えば

$$\delta(\Delta - E_{\mathrm{e}} - E_\nu) p_\nu{}^2 \mathrm{d}p_\nu = (\Delta - E_{\mathrm{e}})^2 \tag{10.5}$$

となるので，結局

$$\mathrm{d}\Gamma = G_\beta{}^2 |\langle \mathbf{1} \rangle|^2 (1 + v\cos\theta) \frac{1}{(2\pi)^5} pE(\Delta - E)^2 \mathrm{d}E \mathrm{d}\Omega_{\mathrm{e}} \mathrm{d}\Omega_\nu \tag{10.6 a}$$

ただし，$p = p_{\mathrm{e}}$, $E = E_{\mathrm{e}}$, $v = p_{\mathrm{e}}/E_{\mathrm{e}}$ と改めて書き直した．これから電子のエネ

ルギースペクトルは位相空間体積だけで決まることがわかる．ここで f 値として

$$f \equiv \int_{m_e}^{\varDelta} F(Z, E) pE(\varDelta - E)^2 \mathrm{d}E \qquad (10.7\,\mathrm{a})$$

を定義する[1]．$F(Z, E)$ はクーロン波動関数による補正項で計算可能な量である．電子が非相対論的であるときは，次の近似式が成立する．

$$F(Z, E) \simeq \frac{2\pi Z\alpha/v}{1-\exp(-2\pi Z\alpha/v)} \qquad (10.7\,\mathrm{b})$$

$E \gg m_e$, $F \sim 1$ のとき $f \sim \varDelta^5$ であるので，$\varDelta$（いわゆる Q 値）の値のわずかな変化で，寿命は 10^{-8}～100 秒くらいまで大きく変わる．半減期 $t_{1/2} = \ln 2/\Gamma$ を使うと，全崩壊率 Γ は

$$\Gamma = \int \mathrm{d}\Gamma = \frac{G_\beta^2}{2\pi^3} |\langle \mathbf{1} \rangle|^2 f = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \qquad (10.6\,\mathrm{b})$$

と表せるので，ft 値を

$$ft_{1/2} = \frac{2\pi^3 \ln 2}{G_\beta^2 |\langle \mathbf{1} \rangle|^2} \qquad (10.8)$$

で定義する．$f, \langle \mathbf{1} \rangle$ は殻モデルなどを使えば計算できる量であり，$t_{1/2}$ は実測できる量であるので，これより G_β が決められる．

d. フェルミ遷移とガモフ-テラー遷移

許容遷移では軌道角運動量が 0 であり，またスピンが反転しないので，原子核の始状態から終状態への角運動量移行は $\varDelta J = 0$ であり，パリティが変わらない（フェルミ遷移）．実際の β 崩壊では，角運動量移行が 1（$\varDelta J = 0, \pm 1$, ただし，$0 \to 0$ は禁止）でパリティ変化なしの遷移（ガモフ-テラー遷移）も観測されているので，フェルミの提唱した (10.2) のラグランジアンのみではすべての β 崩壊を説明できない．さらに 1957 年にはパリティ非保存が発見されたので，その効果をも取り入れる必要がある．最も一般的な 4-フェルミ相互作用は，次の形に書くことができる．C' の掛かる項は，パリティ変換をすると符号が変わるので，パリティ保存を破る項である．

$$-\mathcal{L}_1 = G_\beta \sum [(\bar{p}\Gamma_i n)(C_i \bar{e}\Gamma_i \nu + C_i{}' \bar{e}\Gamma_i \gamma^5 \nu) + \mathrm{h.c.}] \qquad (10.9\,\mathrm{a})$$

$$\Gamma_i = 1\,(\mathrm{S}),\ \gamma^\mu\,(\mathrm{V}),\ \sigma^{\mu\nu}\,(\mathrm{T}),\ \gamma^\mu\gamma^5\,(\mathrm{A}),\ i\gamma^5\,(\mathrm{P})$$

S, V, T, A, P はそれぞれ，スカラー，ベクトル，テンソル，軸性ベクトル，

擬スカラーを表す．$C_V=1$，他の $C_i=C_i'=0$ とおけば，(10.9 a) の G_β は，(10.2) で定義した G_β に等しい．より一般的には，微分を含む相互作用も検討しなければならない．しかし，微分を含むとエネルギースペクトルの形が変わるがそのような兆候はみられない．C_i, C_i' は複素数であるから，全部で 20 のパラメターが存在することになる．各項の C, P, T による変換性（付録 E）を使うと，P 保存が成立すれば，$C_i'=0$，C 保存が成立すれば，C_i は実数で C_i' は純虚数，T 保存が成立すればすべての C_i, C_i' が実数となることが言える．

演習 10.1* 上の記述を証明せよ．

現実の世界では，弱い相互作用で P, C 対称性が最高限度に破れ，T 対称性がほぼ保存している．T 保存を仮定すれば（C_i, C_i' が実数），決めるべきパラメターの数は 10 個である．さしあたっては P, C, T が保存，すなわち C_i は実数，$C_i'=0$ として話を進める．この場合パラメターの数は 5 個である．反跳を無視する近似で，第 3 章，表 3.2 の Γ の表式を使えば，遷移要素は，

$$T_{\mathrm{fi}}\sim G_\beta[\langle\mathbf{1}\rangle\{C_{\mathrm{S}}(\bar{u}(p_{\mathrm{e}})v(p_\nu))+C_{\mathrm{V}}(\bar{u}(p_{\mathrm{e}})\gamma^0v(p_\nu))\} \\ +\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle\cdot\{C_{\mathrm{A}}(\bar{u}(p_{\mathrm{e}})\gamma^0\boldsymbol{\sigma}v(p_\nu))+C_{\mathrm{T}}(\bar{u}(p_{\mathrm{e}})\boldsymbol{\sigma}v(p_\nu))\}] \tag{10.9 b}$$

$$\langle\mathbf{1}\rangle\equiv\int\mathrm{d}^3x\Phi_{\mathrm{F}}^*(\boldsymbol{x})\tau^+\Phi_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}), \tag{10.9 c}$$

$$\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle\equiv\int\mathrm{d}^3x\Phi_{\mathrm{F}}^*(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}\tau^+\Phi_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}) \tag{10.9 d}$$

これから崩壊率を計算した結果の表式は，形は (10.6) と変わらず，行列要素の自乗 $|\langle\mathbf{1}\rangle|^2$ と，角相関係数 1 を

$$|\langle\mathbf{1}\rangle|^2\longrightarrow C_{\mathrm{F}}^2|\langle\mathbf{1}\rangle|^2+C_{\mathrm{GT}}^2|\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle|^2 \tag{10.10 a}$$

$$C_{\mathrm{F}}^2=|C_{\mathrm{S}}|^2+|C_{\mathrm{V}}|^2 \tag{10.10 b}$$

$$C_{\mathrm{GT}}^2=|C_{\mathrm{A}}|^2+|C_{\mathrm{T}}|^2 \tag{10.10 c}$$

$$(1+v\cos\theta)\longrightarrow(1+\lambda v\cos\theta) \tag{10.11 a}$$

$$\lambda=\frac{(-|C_{\mathrm{S}}|^2+|C_{\mathrm{V}}|^2)|\langle\mathbf{1}\rangle|^2+(1/3)(-|C_{\mathrm{A}}|^2+|C_{\mathrm{T}}|^2)|\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle|^2}{(|C_{\mathrm{S}}|^2+|C_{\mathrm{V}}|^2)|\langle\mathbf{1}\rangle|^2+(|C_{\mathrm{A}}|^2+|C_{\mathrm{T}}|^2)|\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle|^2} \tag{10.11 b}$$

で置き換えるのみで得られる*2)．

---

*2) パリティ非保存項を入れる場合は，さらに $|C_i|^2\to|C_i|^2+|C_i'|^2$ とする．後に，$|C_i'|=|C_i|$ と判明するので，パリティ非保存項を含めるときは G_β を $G_\beta/\sqrt{2}$ で置き換えることによって G_β もそのまま使えるようにする．

P 型は許容遷移の範囲では寄与しない．相互作用が S または V のときはベクトル型と同じ遷移則，つまり $\Delta J=0$ でパリティが変化しないのでフェルミ型遷移と呼ぶ．A または T のときは電子と ν が角運動量 1 を持ち去りスピン反転が起きるので，$\Delta J=0, \pm 1$（パリティは反転せず）の遷移（ガモフ-テラー型）となる．

演習 10.2 $F(Z, E) \simeq 1$, $E \gg m_e$ であれば $f=\Delta^5/30$ となり，全崩壊率は

$$\Gamma=\frac{G_\beta{}^2\Delta^5}{60\pi^3}(C_F{}^2\langle \mathbf{1}\rangle^2+C_{GT}{}^2\langle \boldsymbol{\sigma}\rangle^2) \tag{10.12}$$

となることを示せ．

e. 相互作用の種類の決定

原子核の始状態および終状態がわかっているときは，フエルミ遷移とガモフ-テラー遷移の混合率

$$F=\frac{|\langle \mathbf{1}\rangle|^2}{|\langle \mathbf{1}\rangle|^2+|\langle \boldsymbol{\sigma}\rangle|^2} \tag{10.13}$$

がわかるので，F の関数として ft 値を測定すれば，C_F および C_{GT} が決められる．実験値は

$$G_\beta=1.14730\pm 0.00064\times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$$
$$|C_{GT}/C_F|=1.2601\pm 0.0025 \tag{10.14}$$

いろいろな相互作用の中で 1 種類のみが効くときは角分布の係数は

$$\lambda=-1\,(\mathrm{S}),\quad =+1\,(\mathrm{V}),\quad =1/3\,(\mathrm{T}),\quad =-1/3\,(\mathrm{A})$$

で与えられる．種々の核について，角相関係数 λ を測定し F の関数として描けば，どの成分が効いているかを決められる．歴史的にはこうした経緯で

$$C_S=C_T=0,\quad C_V=1,\quad C_A\simeq -1.260\,C_V \tag{10.15}$$

と決められた．

f. 中性子の β 崩壊

始状態と終状態がアイソスピンの同一多重項のメンバーのときは，$\langle \mathbf{1}\rangle$, $\langle \boldsymbol{\sigma}\rangle$ は，原子核の波動関数を知らなくても簡単に計算できる．p, n はアイソスピン 1/2 の固有状態であるので，

$$\langle \mathbf{1}\rangle^2=1,\quad \langle \boldsymbol{\sigma}\rangle^2=3 \tag{10.16}$$

中性子の場合には，Δ は，m_e と同じオーダーであるので，Γ の表式 (10.12)

はそのままは使えないが，f の積分を実行し，後にふれる弱磁気項などまで含めて計算を行うと，実験値（$\tau_n=888.6\pm3.5$ 秒）とよく合う結果が得られる．

10.1.2　パリティ非保存

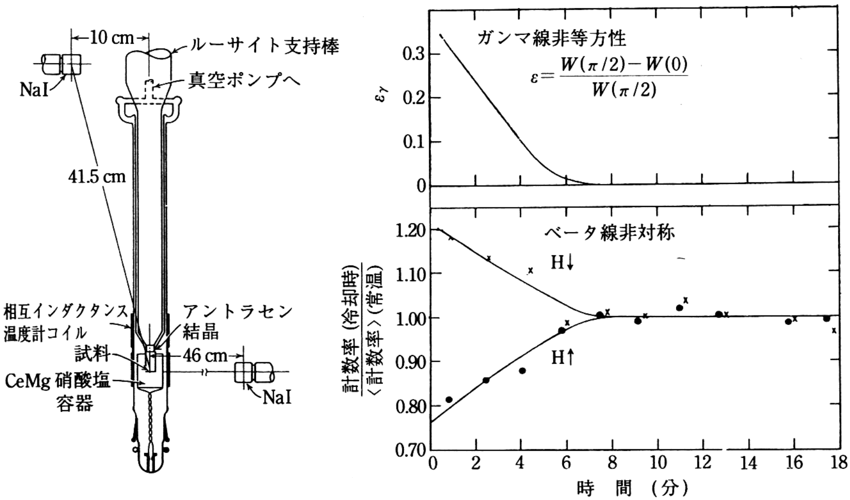
a．パリティの破れの検証法

おそらく素粒子物理学史上で最もショッキングな出来事は1957年のパリティ非保存の発見であったろう．今日でこそいかなる保存則も実験的にチェックされるべきものとして何ら聖域視されているものはないが，当時にあってはパリティのような基本的対称性が破れることは想像を絶することであった．発端は当時問題になっていた τ-θ パズルといわれるものである．今日K中間子として知られている粒子が，あるときは 3π に壊れ（τ 粒子），あるときは 2π に壊れるのである（θ 粒子）．τ, θ ともスピンは0とわかっていた．π はスピン0で固有パリティ負の粒子とわかっていたから，2π で角運動量 $J=0$ を実現するには軌道角運動量 l もまた0，したがってパリティは＋である．一方 3π の軌道角運動量を l と L とすれば，ベクトル的に足して0となるためには $l=L$，したがってパリティは，$(-1)^{3+l+L}=-1$ である．当然違う粒子のはずであったが，質量と寿命は同じで同一粒子であるようにも見えた．リー（T. D. Lee）とヤン（C. N. Yang）は過去の実験事実を調べ直し，強い相互作用と電磁相互作用については確かにパリティの保存している十分な証拠があるが，弱い相互作用については実験的裏付けがなく，パリティが保存されない可能性があることに気がつき，パリティの破れを検証する実験を示唆した[2)]．

運動量 $\boldsymbol{p}$ はパリティ変換で符号を変えるが角運動量 $\boldsymbol{J}$ は不変である．したがって，$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{p}$ のような観測量が崩壊過程の中に存在すればパリティ保存則を破ることになる．角運動量 $\boldsymbol{J}$ をもつ原子核を偏極させ，$\boldsymbol{p}$ を電子の運動量とすれば，$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{p}$ は偏極軸と崩壊電子のなす角の余弦($\cos\theta$)に比例する．したがってパリティ非保存のチェックをするには，偏極原子核で β 崩壊を起こさせ，放出電子の角分布を測定して偏極軸に垂直な面に対する上下非対称が存在するかどうかをみればよい．

b．ウーの実験

リー-ヤンと同じ大学にいたウー（C. S. Wu）は，^{60}Co を 0.01°K まで冷却し



(a) (b)

図 10.2 ウーらによるパリティ非保存発見の実験装置 (a) とデータ (b)[3)]
β 崩壊の非対称性は ^{60}Co の $5^+ \to {}^{60}$Ni(4^+) へベータ崩壊し，続いて $4^+ \to 2^+ \to 0^+$ へ γ 遷移をする．γ の非等方性と β 崩壊の非対称の時間依存性が等しいことは，β の非対称が存在しかつ偏極度に比例していることを示している．

偏極させてから β 崩壊を起こさせて実験した（図 10.2[3)]）．常磁性体である Co に数百ガウスの弱い磁場を掛けて，まず外殻の電子を偏極させる．この電子はスピン-スピン相互作用によって Co 原子核を偏極させることができる．^{60}Co$(5^+) \to {}^{60}$Ni(4^+) はガモフ-テラー型遷移であるので，(10.5) で $C_i = C_A$ としてパリティ非保存も含めて計算すると，電子の角分布は

$$W(\theta) \sim 1 + APv\cos\theta$$

$$A = \frac{2\mathrm{Re}(C_A C'_A)}{|C_A|^2 + |C'_A|^2} \tag{10.17 a}$$

となる．

P は Co 原子核の偏極率，v は電子の速度である．実験結果は，$P=0.65$, $v \sim 0.6$, $APv = -0.38$ であったので，

$$A = -1 \pm 0.1 \tag{10.17 b}$$

という結果を得た．これから

$$C'_A \sim -C_A \tag{10.18}$$

を得る．すなわちパリティ保存則は最大限に破れている．また C_A' が純虚数でないこともわかるから C 保存則も同時に破れている．もし V 型についても $C_V' \sim -C_V$ が成立するならば，(10.9 a)，(10.15) の結果と (10.18) を総合して，β 崩壊のラグランジアンは，

$$-\mathcal{L}_I = (G_\beta/\sqrt{2})[\bar{p}\gamma^\mu(1-1.26\gamma^5)n][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu] \tag{10.19}$$

と書けることになる．$G_\beta/\sqrt{2}$ としたのはパリティ非保存項を入れる前と同じ定数 G_β を使うためである．$C_A/C_V=-1.26$ の符号は，偏極自由中性子の β 崩壊の eν 角相関，偏極との角相関から決められた[4]．この相互作用は，V 型と A 型をほぼ同じ強さで含み，符号が逆なので通常 V-A 型という．

ここで，弱相互作用について重要なことがわかった．すなわち $1-\gamma^5$ によって，少なくともレプトンはカイラリティ負の成分しか相互作用に寄与しないということである（カイラリティについては§3.8 参照）．

10.1.3　π 中間子の崩壊

前節までの議論で決まったのは，S, V, T, A 相互作用の結合定数である．P 型相互作用は，β 崩壊の許容遷移の範囲では寄与しないので，結合定数を決めるには π の崩壊を調べる必要がある．まずは，原子核ベータ崩壊で決まった相互作用の形 (10.19) を使って崩壊率を計算してみよう．π 中間子は，ほぼ 100%

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu, \qquad \pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu} \tag{10.20 a}$$

に崩壊し，平均寿命は[5]

$$\tau = 2.6030 \pm 0.0024 \times 10^{-8}\ \text{秒} \tag{10.20 b}$$

であるので，弱い相互作用が働いていることがわかる．π の崩壊モードでの著しい特徴は，$\pi \to e+\nu$ への分岐比 BR (branching ratio) が[5]

$$\mathrm{BR}(\pi^\pm \to e^\pm + \nu) = 1.218 \pm 0.014 \times 10^{-4} \tag{10.21}$$

であり，類似の μ 崩壊に比べ位相空間体積から予想される割合と大きく異なることである．μ と電子をまとめて l と記し反応の変数を

$$\pi(k) \longrightarrow l(p) + \nu(q) \tag{10.22}$$

とする．β 崩壊で得られた相互作用を μ に拡張するには，ミューオンが電子

と質量以外は同じ性質をもっていることから，$\mathrm{e} \to \mu$ の置き換えをすればよいと察しがつくので，

$$-\mathscr{L}_{\mathrm{I}}=(G_\beta/\sqrt{2})[\bar{p}\gamma^\mu(1-1.26\gamma^5)n][\bar{\mu}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu] \tag{10.23}$$

とすれば，遷移確率は

$$T_{\mathrm{fi}}=\langle\mu\nu|H_{\mathrm{I}}|\pi\rangle=(2\pi)^4\delta^4(k-p-q)$$
$$\times(G_\beta/\sqrt{2})\langle 0|\bar{p}\gamma^\mu(1-1.26\gamma^5)n|k\rangle\langle p,q|\bar{\mu}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu|0\rangle \tag{10.24}$$

となる．ハドロン部分は強い相互作用の補正（クォークのつくる π の波動関数）が入るので，第1原理からの計算は簡単にはできないが，対称性から多少の制限は付けられる．ローレンツ不変性の議論から

$$\langle 0|\bar{p}\gamma^\mu n|k\rangle-1.26\langle 0|\bar{p}\gamma^\mu\gamma^5 n|k\rangle=ik^\mu g_\pi+ik^\mu f_\pi \tag{10.25}$$

と書けるはずである．これはカレントのベクトルとしての性質と，この行列要素の中に現れるベクトルは π の運動量しかないということによる．π のパリティは負であるから左辺第1項は軸性ベクトル，第2項は極性ベクトルであるが右辺は極性ベクトルであるから $g_\pi=0$ でなければならない．f_π を π の崩壊定数という．エネルギー運動量の保存則とディラック方程式から

$$k_\lambda\langle p,q|\bar{\mu}\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\nu|0\rangle=(p+q)_\lambda\bar{u}(p)\gamma^\lambda(1-\gamma^5)v(q)$$
$$=m_\mu\bar{u}(p)(1-\gamma^5)v(q) \tag{10.26}$$

したがって遷移行列は

$$T_{\mathrm{fi}}=(2\pi)^4\delta^4(k-p-q)(G_\beta/\sqrt{2})if_\pi m_\mu\bar{u}(p)(1-\gamma^5)v(q) \tag{10.27}$$

なので，崩壊率は容易に計算できて

$$\Gamma(\pi\to\mu\nu)=(G_\beta f_\pi)^2\frac{m_\mu{}^2}{8\pi}\frac{(m_\pi{}^2-m_\mu{}^2)^2}{m_\pi{}^3} \tag{10.28}$$

G_β は β 崩壊から決まっているから，崩壊率の観測値より崩壊定数が

$$f_\pi=131.74\pm0.15\ \mathrm{MeV}=0.94\,m_\pi \tag{10.29}$$

と決まる．$\mathrm{e}\nu$ への崩壊率は $m_\mu\to m_{\mathrm{e}}$ とするだけでよいから

$$\frac{\Gamma(\pi\to\mathrm{e}\nu)}{\Gamma(\pi\to\mu\nu)}=\frac{m_{\mathrm{e}}{}^2(m_\pi{}^2-m_{\mathrm{e}}{}^2)^2}{m_\mu{}^2(m_\pi{}^2-m_\mu{}^2)^2}=1.284\times10^{-4} \tag{10.30}$$

放射補正をも考慮すると理論値は 1.233×10^{-4} となり[6]，実験値（10.21）との一致は非常によい．

崩壊率が質量の自乗に比例するという結果は次のように理解できる．π^+ の

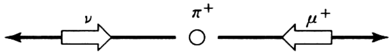


図 10.3　$\pi^+ \to \mu^+\nu$ の崩壊率が $m_\mu{}^2$ に比例する
π^+ のスピンは 0 であり，ニュートリノはヘリシティが負であるから角運動量保存則によって μ^+ のヘリシティも負である．ところが V-A 相互作用では μ^+ の波動関数はヘリシティの負成分と，正成分の振幅比が m/E に比例するので崩壊率 $\simeq m^2/p^2$ となる．

静止系で考えるとニュートリノ ν と l^+ は正反対方向に飛び出す（図10.3）．ν は質量が0であるので $(1-\gamma^5)$ 因子により 100 % 負のヘリシティ状態にある（ただし，π^+ 崩壊のとき．π^- 崩壊のときは $\bar{\nu}$ が生成されるのでこのときは 100 %正のヘリシティ状態である）．π^+ のスピンは 0 であるから，角運動量保存則により l^+ もまた負のヘリシティ状態でなければならない．l^+ は反粒子であるから $(1-\gamma^5)$ 因子によって，負のヘリシティ成分は，m_l/p だけ抑圧される（§ 3.8 の議論参照）．

したがって $m_l=0$ であるならばこの反応は完全に禁止されるが，辛うじて $m_l \neq 0$ の分だけ負のヘリシティ成分をわずかながらもてるので反応が可能となるのである．

レプトン部分に，$(1-\gamma^5)$ が掛かっていることは，π の崩壊からの μ^+ のヘリシティ h を見てもわかる．実験データは[7]，

$$0.9959 < |h(\mu^+)| < 1.0 \tag{10.31}$$

で，上の相互作用形と完全に整合している．

P 型相互作用

π の崩壊率を調べることにより，β 崩壊では検定できなかった擬スカラー (P) 型相互作用の存在がほぼ完全に否定される．P $(\Gamma=i\gamma^5)$ 型の場合，散乱振幅は

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{fi}} &\sim G_\beta C_{\mathrm{P}} \langle 0|\bar{p} i\gamma^5 n|\pi\rangle \bar{u}(p) i\gamma^5(1-\gamma^5)v(q) \\ &= G_\beta C_{\mathrm{P}} f_\pi' \bar{u}(p)(1-\gamma^5)v(q) \end{aligned} \tag{10.32}$$

で与えられる．V-A 型と P 型が共存するときの，電子とミューオンへの相対崩壊率は次式で与えられる．

$$\frac{\Gamma(\pi \to \mathrm{e}\nu)}{\Gamma(\pi \to \mu\nu)} = \left|\frac{1-(m_{\mathrm{e}}/m_\pi)^2}{1-(m_\mu/m_\pi)^2}\right|^2 \left|\frac{C_{\mathrm{P}} f_\pi' - (m_{\mathrm{e}}/m_\pi)^2 C_{\mathrm{V-A}} f_\pi}{C_{\mathrm{P}} f_\pi' - (m_\mu/m_\pi)^2 C_{\mathrm{V-A}} f_\pi}\right|^2 \tag{10.33}$$

この式を実験値 (10.21) と比較すれば，P 型のみという解は除外されるこ

とがただちにわかる．V-A 型との共存を許す場合でも，実験値と矛盾しないためには，$|C_{\mathrm{P}}|^2/|C_{\mathrm{V-A}}|^2 \lesssim 10^{-4}$ でなければならない．

この式の意味は，P 型はヘリシティを反転するから (次節の議論)，l^+ には $(1+\gamma^5)$ 因子が掛かることになり，負のヘリシティが選択されるということである．したがって，m_l による抑圧がないので，電子とミューオンへの崩壊率は同程度となるのである．

以上の結果を総合してみると，π の崩壊モードは，弱い相互作用が $(1-\gamma^5)$ 因子をもつこと，つまり V-A 型であることの特徴が最も顕著に現れた例であるといえよう．

なお，この章で解説したように，弱い相互作用の形を決めるために，歴史的には紆余曲折の道をたどった．しかし，論理的には，次に述べるヘリシティの議論で明らかなように，崩壊して出てきたレプトン (電子，ニュートリノ) が，完全に縦偏極していてヘリシティが負，反レプトン (陽電子，反ニュートリノ) のヘリシティが正であるという実験結果のみから，パリティ保存則が最大限に破れていてかつ

$$C_{\mathrm{S}}=C_{\mathrm{T}}=C_{\mathrm{P}}=0, \qquad C_{\mathrm{A}}=-C_{\mathrm{V}}{}^{*3)}$$
$$C'_i=-C_i \tag{10.34}$$

と結論づけられるという方が簡潔にして明快である．

10.2 ニュートリノの性質

10.2.1 ヘリシティと角相関

弱相互作用のラグランジアンが (10.19) で与えられるということは，重要な意味をもつ．もしニュートリノの質量が 0 であるならば $(1-\gamma^5)\nu$ は 2 成分ニュートリノを意味し，また弱い相互作用に現れる電子およびニュートリノのカイラリティは常に負である (§3.8 の議論)．したがって放出された $e^-, \bar{\nu}$ のヘリシティはそれぞれ $-v, +1$ でなければならない (e^+, ν のときは符号が逆となる)．ここで注目すべきことは V, A 型は広い意味でのヘリシティ (つまりカイラリティ) を保存するが，S, T, P 型はカイラリティを反転させるという

*3) C_{A} が (10.15) と違う理由については，§10.3.2「CVC 仮説」の議論参照．

ことである．これを見るには，まず γ 行列が次のような性質をもつことに着目する．

$$\gamma^5\gamma^5=1, \qquad \gamma^5\gamma^0=-\gamma^0\gamma^5 \tag{10.35 a}$$

$$\gamma^5\Gamma=\pm\Gamma\gamma^5 \tag{10.35 b}$$

＋は $\Gamma=1$, $\sigma^{\mu\nu}$, $i\gamma^5$（すなわち S, T, P）のとき，－は $\Gamma=\gamma^\mu$, $\gamma^5\gamma^\mu$（すなわち V, A）のとき成立する．これらの式を使えば

$$\bar{e}\Gamma\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\nu=e^\dagger\gamma^0\Gamma\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)^2\nu$$

$$=\left(\frac{1\mp\gamma^5}{2}e\right)^\dagger\gamma^0\Gamma\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\nu \qquad \begin{cases} -\text{は} & \text{V, A} \\ +\text{は} & \text{S, T, P}\end{cases} \tag{10.36}$$

したがって，放出される電子と $\bar{\nu}$ のヘリシティを測定すれば V, A と S, T, P の明快な区別ができる．

ニュートリノと電子が常にカイラリティ負をもつという事実を受け入れれば，$e^-\bar{\nu}$ 角相関で，V 型が $\lambda=1$, A 型が $\lambda=-1/3$ をもつという事実（(10.11

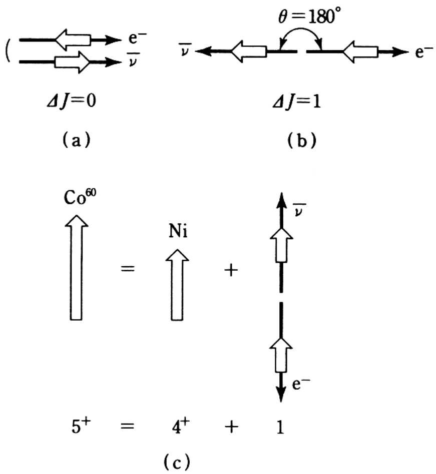


図 10.4 レプトンのカイラリティと $e\bar{\nu}$ 角相関，非対称の関係
弱い相互作用の V-A 型（カイラリティ負の粒子のみ相互作用をする）を認めるとベータ崩壊からの e^- と $\bar{\nu}$ のヘリシティはそれぞれ － と ＋ に決まる．V 型（フェルミ）遷移では $\Delta J=0$ であるので e^- と $\bar{\nu}$ は同方向になって角運動量保存則を守ろうとする．偏極した Co^{60} からの崩壊（A 型，$\Delta J=1$）では e^- と $\bar{\nu}$ は逆方向に出て $J=1$ をつくり，かつ e^- が Co の偏極方向と逆方向に出やすいから非対称度 A は負となる．

b) 参照) が直観的に次のように理解できる．V 型は $\Delta J=0$ であるから，$e^-\bar{\nu}$ は角運動量 0 をもつ．電子のヘリシティは負，$\bar{\nu}$ のヘリシティは正であるから，全体でスピン 0 をもつためには $e^-\bar{\nu}$ は同方向を向いていなければならない．つまり $\theta=0$ になろうとするので $\lambda>0$ となる（図 10.4 (a)）．A 型の場合は逆に 180° 方向になろうとするから $\lambda<0$ となる（図 10.4 (b)）．$-1/3$ となるのはスピン自由度を反映している．また，Co^{60} の実験で非対称 $A=-1$ になるのも同様にして説明できる．つまり $Co(5^+)\rightarrow Ni(4^+)$ で $\Delta J=1$ であるから，角運動量保存則から，$e^-\bar{\nu}$ 系のスピンは 1 でなければならず e^- と $\bar{\nu}$ は互いに 180° 方向に放出されるとともに，$e^-\bar{\nu}$ 系のスピンは親の Co のスピンと同方向でなければならない．すなわち，e^- は Co のスピンと逆向きに出やすく $A<0$ となる（図 10.4 (c)）．

10.2.2 電子のヘリシティ測定

電子のヘリシティは，通常運動方向に対する縦偏極を横方向の偏極に直してから，横偏極度を測定する．縦偏極を横偏極に直すやり方は；

（1） 図 10.5 のように静電場で電子の軌道を 90° 曲げる．スピンはそのまま保持される．

（2） 電子の運動方向に直角に電場と磁場をかけて軌道は曲がらないようにし，スピンだけを磁場による歳差運動で 90° 曲げる．

$$i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}t}=[\boldsymbol{\sigma}, H]=[\boldsymbol{\sigma}, -\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B}]=i\frac{e}{m}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{B} \tag{10.37}$$

（3） 第 5 章，図 5.4 に示したようにアルミニウムの薄箔を円形に配置し，円周の一点から電子を出発させて直径の反対側で受けてやる．低エネルギーではクーロン散乱が優勢で，磁気散乱は効かないのでスピンの方向は変わらず軌道だけ 90° 曲がる．

などの方法がある．横偏極にしてあると，原子核とのモット散乱でスピン-軌道結合相互作用（$H=-k(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{l})$：電子の固有磁気能率と運動により生じる磁気能率との相互作用）で生じる非対称を測定して，偏極度を決めることができる．

非対称が生じる理由は，古典的に次のようにして理解できる．図 10.5 (b)

で電子の運動方向を x 軸にとり偏極を z 方向とする．電子が $y>0\,(<0)$ の軌道をとるときは $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は，$-z\,(+z)$ 方向を向くので，ハミルトニアンは符号を変える．つまり，$y>0\,(<0)$ により斥力（引力）となるのでどちらの場合も $+y$ 方向に曲げられ，非対称が生じる．

実験結果は電子のヘリシティは $-v$，陽電子のヘリシティは $+v$ でカイラリティ負を確認した[8]．

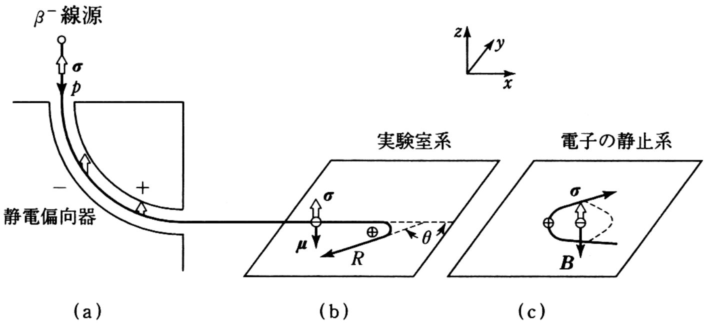


図 10.5

電子のヘリシティ（縦偏極）は一度横偏極状態に直してから，モット散乱を起こさせ，散乱の左右非対称により測定する．この図では横偏極に直すのに静電偏向器 (a) を使用したが，第5章で述べたようにクーロン散乱で90°曲げる方法もある．モット散乱で非対称が生じるのは，電子の静止系から見た場合核子の電流による磁場 $\boldsymbol{B}$ と電子の磁気能率による結合 $(H=-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B})$ が存在し，この結合による散乱は，電子の入射位置によらず常に同方向になるからである[8]．

10.2.3 ニュートリノのヘリシティ測定

ニュートリノヘリシティは直接には測定はできないが，電子捕獲に伴うニュートリノ放出の際の反跳核のスピンを測定することによって決めることができる[9]．反応は

$$e^- + {}^{152}\mathrm{Eu} \longrightarrow {}^{152}\mathrm{Sm}^* + \nu, \qquad \mathrm{Sm}^* \longrightarrow \mathrm{Sm} + \gamma \tag{10.38}$$

$$J \quad 1/2 \quad 0 \qquad\quad 1 \quad 1/2 \qquad\quad 1 \qquad\quad 0 \quad 1$$

を使う（図 10.6(a)）．最初の反応は Eu が静止状態かつ電子が S 波状態で吸収されるから，ν と反対方向に反跳される Sm^* スピンの向きは電子のスピンと同一方向で ν のスピンとは逆方向である．もし放出される γ の運動方向が，親の Sm^* と同一であれば，γ は親のヘリシティを保持するので，γ のヘリシティを測ることにより ν のヘリシティが決められる．この実験の巧妙なとこ

ろは共鳴散乱によって Sm* の運動方向の前方に放出される γ を選択的に拾うことを保証したことである．そのため，放出された γ を再び ^{152}Sm と散乱させ，その中から

$$\gamma + {}^{152}\mathrm{Sm} \longrightarrow {}^{152}\mathrm{Sm}^* \longrightarrow {}^{152}\mathrm{Sm} + \gamma \qquad (10.39)$$

のように γ が Sm に吸われて，準位が 963 KeV 上の Sm* 中間状態を通る散乱のみを拾い出すのである．終状態の Sm の反跳エネルギーを賄うために，入射する γ のエネルギーは 963 KeV よりやや高くないといけない．この余分のエネルギーを ν に反跳された Sm* が γ を前方に放出することにより供給する．γ のヘリシティは，磁化鉄の中を通してやれば，吸収率がヘリシティに

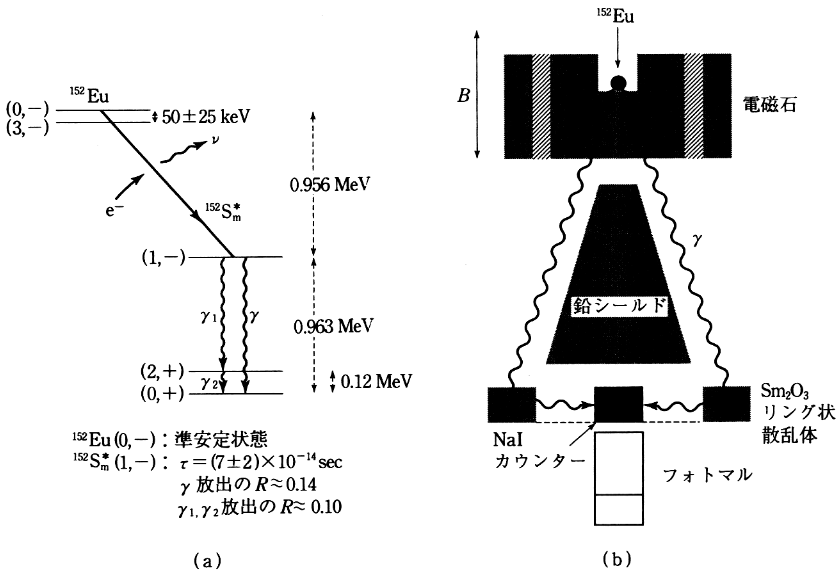


図 10.6　ニュートリノヘリシティ測定実験[9)]

Eu(0^-) が電子捕獲をして Sm(1^-) の励起状態になりニュートリノを放出する．$e^- + {}^{152}\mathrm{Eu} \rightarrow {}^{152}\mathrm{Sm}^* + \nu$　Sm* はニュートリノと反対方向に反跳され，Sm*(1^-) → Sm(0^+)+γ によって γ を放出するが前方に放出された γ のみが，別の Sm と共鳴散乱 γ+Sm(0^+) → Sm*(1^-) → γ+Sm(0^+) をすることができる．これが可能なのは ^{152}Sm* の崩壊半減期が $\sim 7\times10^{-14}$sec 程度あるからである．したがって共鳴散乱をした γ のヘリシティを測れば ν のヘリシティが測定できる．γ のヘリシティは磁化した鉄を通すときヘリシティの方向によって吸収のされ方が違うことを利用して測定する．右図は測定装置で Eu アイソトープを磁化鉄の中に入れ，下方にある Sm_2O_3 と共鳴散乱をさせて NaI シンチレーションカウンターで測定する．

よって変わることを利用して決められる．鉄原子内の電子のスピンがγのスピン方向と，反平行のときはγのヘリシティを吸収してスピン反転が可能なのに対し，平行のときはスピン反転ができないので反応が起きにくい．実験結果はニュートリノ(ν)のヘリシティが負であることを示し，β崩壊の相互作用(10.19)の形を確定付けた．

10.2.4　ニュートリノの質量

(10.6)，(10.7)によれば，β崩壊の電子エネルギースペクトル$N(E)$は位相空間因子のみで決まる．

$$N(E) \quad \propto \quad F(Z,E)pE(\Delta-E)^2\mathrm{d}E \qquad (10.40)$$

そこで，

$$K(E)=\sqrt{\frac{N(E)}{pEF(Z,E)}} \quad \propto \quad \Delta-E \qquad (10.41)$$

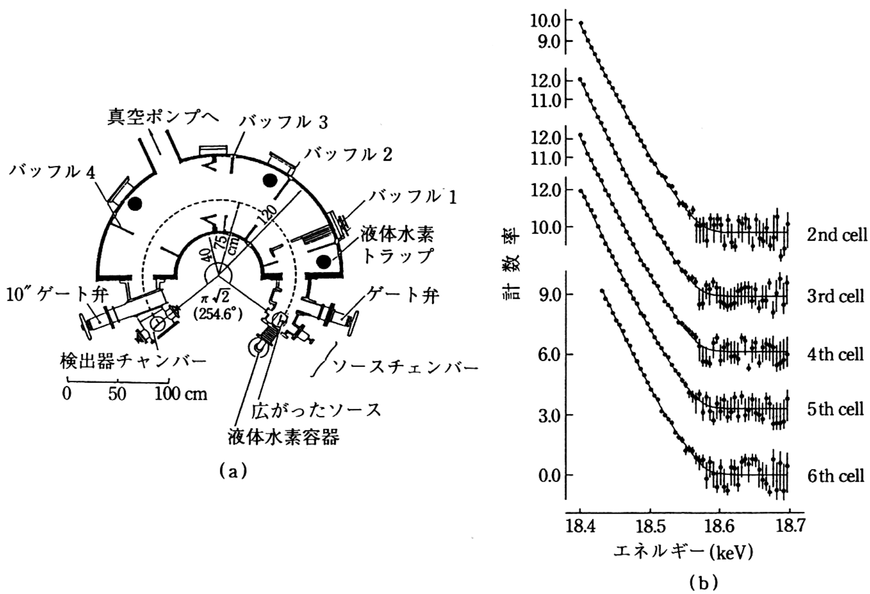


図10.7　ニュートリノ質量を測定する実験[10]

左側に測定装置，右側にデータのカリープロットを示す．測定器の右側の首のところにある^{3}Hアイソトープよりβ崩壊で放出された電子が円弧を描いて左側の口にある比例計算箱とシンチレーションカウンターに捕えられる．データは$m_\nu=0$とする線に最も良く適合し，$m_\nu<13\,\mathrm{eV}$と抑えられる．

をつくればエネルギーの関数として，$\varDelta$ に近いところでは直線的になるはずである．これをカリープロット (Kurie plot) と呼ぶ．ニュートリノの質量が有限 $(m_\nu \neq 0)$ のときは

$$(\varDelta - E)^2 \longrightarrow p_\nu E_\nu = (\varDelta - m_\nu - E)\sqrt{\{(\varDelta - E)(\varDelta + 2m_\nu - E)\}} \qquad (10.42)$$

と変更されるので，カリープロットの E が $\varDelta \sim \varDelta - m_\nu$ 付近で，直線性からのズレとして観測されるはずである．

$\varDelta$ が小さいほど小さな m_ν の値が測定できるので，実験は通常，最小の $\varDelta = 18.6$ KeV をもつトリチウム (^{3}H) の β 崩壊で行われる．図 10.7 は川上らの実験装置とデータを示す[10]．原理的には $E \lesssim \varDelta - m_\nu$ 付近以下でデータは直線性を示し，もし $m_\nu > 0$ であれば終端点は $\varDelta - m_\nu$ 点で，そこでは勾配が無限大のはずであるが，実験測定の有限分解能のために実際は勾配が 0 になる．データは $m_\nu = 0$ と矛盾せず

$$m(\nu_{\mathrm{e}}) < 13\ \mathrm{eV} \qquad (10.43)$$

と求められた．

10.3 普遍 V-A 型相互作用

10.3.1 ミューオン崩壊

a. 崩 壊 率

ミューオンは 100 %電子とニュートリノに崩壊する．

$$\mu^-(p_1) \longrightarrow \mathrm{e}^-(p_4) + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}(p_2) + \nu_\mu(p_3) \qquad (10.44)$$

ラグランジアン密度は，

$$-\mathscr{L}_{\mathrm{I}} = (G_\mu/\sqrt{2})[\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1-\gamma^5)\mu][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu_{\mathrm{e}}] \qquad (10.45)$$

である．ここで，フェルミ結合定数は後の便宜のため特に G_μ と書いた．遷移振幅は

$$T_{\mathrm{fi}} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4)(G_\mu/\sqrt{2})[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p_1)]$$
$$\times \bar{u}(p_4)\gamma^\mu(1-\gamma^5)v(p_2) \qquad (10.46)$$

偏極していない μ の場合はスピンの和と平均をとって，

$$\mathrm{d}\Gamma = (1/2m_\mu)|\mathscr{M}|^2 \mathrm{d\,LIPS} \qquad (10.47)$$

$$\mathrm{d\,LIPS}=(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2-p_3-p_4)\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^9}\frac{\mathrm{d}^3p_3\mathrm{d}^3p_4}{2E_2 2E_3 2E_4} \tag{10.48 a}$$

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2=(G_\mu/\sqrt{2})^2 8K^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{\mu\nu}(p_2, p_4) \tag{10.48 b}$$

ただし，

$$\begin{aligned}K^{\mu\nu}(p_1, p_3)&=(1/4)\sum\bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p_1)\{\bar{u}(p_3)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(p_1)\}^*\\&=2[\{p_1{}^\mu p_3{}^\nu+p_1{}^\nu p_3{}^\mu-g^{\mu\nu}(p_1p_3)\}-i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{1\rho}p_{3\sigma}]\\&\equiv P^{\mu\nu}+Q^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{10.49}$$

である（付録 A.12 参照）.

$$\begin{aligned}&P^{\mu\nu}(p_1, p_3)P_{\mu\nu}(p_2, p_4)=8\{(p_1p_2)(p_3p_4)+(p_1p_4)(p_2p_3)\}\\&Q^{\mu\nu}(p_1, p_3)Q_{\mu\nu}(p_2, p_4)=8\{(p_1p_2)(p_3p_4)-(p_1p_4)(p_2p_3)\}\\&P^{\mu\nu}Q_{\mu\nu}=P_{\mu\nu}Q^{\mu\nu}=0\end{aligned} \tag{10.50}$$

を使えば

$$K^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{\mu\nu}(p_2, p_4)=16(p_1p_2)(p_3p_4)$$

$$\therefore\quad |\overline{\mathcal{M}}|^2=64G_\mu{}^2(p_1p_2)(p_3p_4) \tag{10.51}$$

$$\therefore\quad \mathrm{d}\Gamma=\frac{64G_\mu{}^2(p_1p_2)(p_3p_4)}{2m(2\pi)^5}\frac{\mathrm{d}^3p_2\mathrm{d}^3p_3\mathrm{d}^3p_4}{8E_2E_3E_4}\delta^4(p_1-p_2-p_3-p_4) \tag{10.52}$$

演習 10.3　粒子 2 と粒子 3 の質量が 0 であるとき

$$\begin{aligned}&S^{\mu\nu}\equiv\int p_2{}^\mu p_3{}^\nu\frac{\mathrm{d}^3p_2\mathrm{d}^3p_3}{4E_2E_3}\delta^4(p_1-p_2-p_3-p_4)=\frac{\pi}{24}[g^{\mu\nu}\Delta^2+2\Delta^\mu\Delta^\nu]\\&\Delta^\mu=p_1{}^\mu-p_4{}^\mu=p_2{}^\mu+p_3{}^\mu,\qquad \Delta^2=\Delta_\mu\Delta^\mu\end{aligned} \tag{10.53}$$

を示せ.

ヒント　ローレンツ共変性より，一般形が $Ag^{\mu\nu}+B\Delta^\mu\Delta^\nu$ と書けることを使い，重心系で計算して A と B を決めよ.

演習 10.3 の結果を使うと

$$\mathrm{d}\Gamma=\frac{G_\mu{}^2(p_{1\mu}S^{\mu\nu}p_{4}\nu)}{2m_\mu\pi^5}\frac{\mathrm{d}^3p_4}{E_4} \tag{10.54}$$

電子のエネルギーが最小となるのは，μ の静止系で電子が静止してつくられる場合で，最大となるのは 2 個のニュートリノの運動量がともに電子運動量の 180° 方向を向き電子に最大の反跳を与えるときである．μ の静止系では $p_1=(m_\mu;0,0,0)$ であるので，電子の質量を無視すると

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}x}=\frac{G_\mu{}^2m_\mu{}^5}{96\pi^3}x^2(3-2x),\quad x=\frac{E_4}{m_\mu/2}\quad 0\leqq x\leqq 1 \tag{10.55}$$

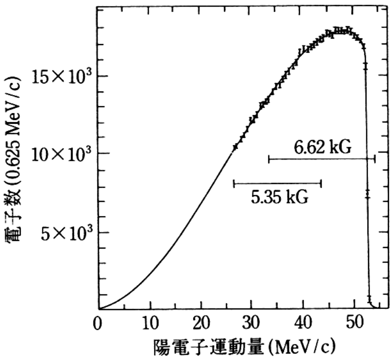


図 10.8 $\mu\to e\nu\nu$ 電子エネルギースペクトルからミシェルパラメターを決める
実線は $\rho=3/4$ として，放射補正などの補正を加えた理論値[11]．

という電子のエネルギースペクトルを得る．これは実験的によく合っている(図 10.8)[11]．さらにエネルギーについて積分をすると全崩壊率が得られる．

$$\Gamma=\frac{G_\mu{}^2 m_\mu{}^5}{192\pi^3} \tag{10.56}$$

演習 10.4 (10.55) を導け．

演習 10.5* また電子の質量を無視しない場合は

$$\Gamma=\frac{G_\mu{}^2 m_\mu{}^5}{192\pi^3}f\left(\frac{m_e{}^2}{m_\mu{}^2}\right) \tag{10.57 a}$$

$$f(y)=1-8y+8y^3-y^4-12y^2\ln y \tag{10.57 b}$$

で与えられることを示せ．

放射補正を考慮したより精密な式は[12,13]，

$$\Gamma=\frac{G_\mu{}^2 m_\mu{}^5}{192\pi^3}f\left(\frac{m_e{}^2}{m_\mu{}^2}\right)\left\{1+\frac{\alpha}{2\pi}\left(1+\frac{2\alpha}{3\pi}\ln\frac{m_\mu}{m_e}\right)\left(\frac{25}{4}-\pi^2\right)\right\} \tag{10.58}$$

となるので，μ の寿命 τ

$$\tau=(1/\Gamma)=(2.19703\pm0.00004)\times10^{-6}\text{ 秒} \tag{10.59}$$

を入れると[5]，

$$G_\mu\simeq10^{-5}m_p{}^{-2} \tag{10.60}$$

で原子核の β 崩壊で得られた結合定数 G_β とほとんど等しい．弱い相互作用の

結合定数 G_β は普遍定数であるといってよさそうである．μ 崩壊から得られる結合定数 G_μ と G_β は

$$G_\mu = 1.166389 \pm 0.000022 \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2} \tag{10.61 a}$$

$$G_\beta = 1.14730 \pm 0.00064 \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2} \tag{10.61 b}$$

G_μ と G_β の間のわずかな，しかし有意な差の意味については後に述べる．

b. ミシェルパラメター

前節ではミューオンの崩壊は V-A 型であるとして議論を進めたが，歴史的には相互作用の形を仮定せず一般的に取り扱い，実験データから相互作用の形を決めるという経過をたどった．偏極したミューオンからの崩壊の電子のエネルギースペクトルや，偏極との角相関関数は相互作用の形により変わり，その一般形はミシェルパラメターにより記述される[14]．このパラメターが有用なのは，μ に限らず τ など一般のレプトンにも適用できて，相互作用の形を決めるのに有効なこと，最近"表面ミューオンビーム"[*4] の手法により偏極ミューオンによる高精度の実験が可能となり，標準理論を超えたモデルのテストにも有効なことなどによる．偏極した $\mu^\mp$ からの崩壊分布は電子の質量を無視する近似で

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}\cos\theta} = 4x^2\Big[3(1-x) + \frac{2}{3}\rho(4x-3) - P_\mu\xi\cos\theta\Big\{1-x+\frac{2}{3}\delta(4x-3)\Big\}\Big] \tag{10.62}$$

ただし，P_μ は μ の偏極度，$x=(2E_\mathrm{e}/m_\mu)$ で，θ は，μ のスピンと電子運動量の間の角である．ρ, ξ, δ がミシェルパラメターと呼ばれる量である．式の形を複雑にしないためにここでは相互作用を V および A のみに限ることにして[*5]，ラグランジアンを

$$-\mathscr{L}_\mathrm{I} = (G_\mu/\sqrt{2})[\,\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu_\mathrm{e}\{\bar{\nu}_\mu\gamma^\mu[g_\mathrm{LL}(1-\gamma^5)+g_\mathrm{LR}(1+\gamma^5)]\mu\} + \bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma^5)\nu_\mathrm{e}\{\bar{\nu}_\mu\gamma^\mu[g_\mathrm{RL}(1-\gamma^5)+g_\mathrm{RR}(1+\gamma^5)]\mu\}] \tag{10.63}$$

[*4] 遅い π 中間子を物質に照射して止めると，$\pi\to\mu+\nu$ によって出てくるミューオンは，ある決まったエネルギーをもつ．特に物質の表面付近で止まった π からのミューオンを集めれば，きれいな単色のビームが得られる．

[*5] 一般の相互作用の場合の式については，Particle Data Group[5] の p. Ⅵ. 16「ミューオン崩壊パラメター」の項を参照．

のように書くと，ミシェルパラメターは次のように表される．

$$\rho=\frac{3}{4}\frac{|g_{LL}|^2+|g_{RR}|^2}{D},\quad \delta=\frac{3}{4}\frac{|g_{LL}|^2-|g_{RR}|^2}{D},\quad \xi=1 \qquad (10.64)$$

$$D=|g_{LL}|^2+|g_{LR}|^2+|g_{RL}|^2+|g_{RR}|^2$$

標準的な V-A 型では，$g_{LL}=1$, $g_{LR}=g_{RL}=g_{RR}=0$ なので，$\rho=\delta=3/4$, $\xi=1$ となる．

電子部分については V-A とし ($g_{RL}=g_{RR}=0$) μ 部分についてのみ問題にするときは，もし相互作用が V+A 型ならば $g_{LL}=0$, $g_{LR}=1$，純粋な V (A) ならば $g_{LL}=g_{LR}\,(-g_{LR})$ となるので，それぞれ ρ は，0, 3/8 (3/8) でなければならない．実験では[5]，

$$\rho=0.7518\pm0.0026 \qquad (10.65\,\text{a})$$

$$\delta=0.7486\pm0.0026(\text{stat})\pm0.0028(\text{sys}) \qquad (10.65\,\text{b})$$

$$\xi P_\mu=1.0027\pm0.0079(\text{stat})\pm0.0030(\text{sys}) \qquad (10.65\,\text{c})$$

P_μ は μ の偏極度で V-A が正しければ，$\pi\to\mu\nu$ から得られる μ は 100 %偏極しているはずのものである．表面 μ ビームを使用した実験解析によれば，90 % 信頼度で[15]，

$$|g_{LL}|>0.888,\quad |g_{LR}|<0.060,\quad |g_{RL}|<0.110,\quad |g_{RR}|<0.033 \qquad (10.66)$$

このように非常によい精度で，V-A 型の正しいことが確かめられている．

10.3.2　CVC 仮説

a.　アイソスピンカレント

β 崩壊とミューオン崩壊から決められた相互作用の形は

$$-\mathcal{L}_I=(G_\beta/\sqrt{2})[\bar{p}\gamma^\mu(1-1.26\gamma^5)n][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu_e+\bar{\mu}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu_\mu]$$
$$+(G_\mu/\sqrt{2})[\bar{\mu}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu_\mu][\bar{\nu}_e\gamma_\mu(1-\gamma^5)\bar{e}]+\text{h.c.} \qquad (10.67)$$

とまとめられる．弱カレントのベクトル部分については，μ 崩壊の結合定数 G_μ と β 崩壊の結合定数 G_β とはほとんど同一（誤差 2 %以下）である．第 1 項は中性子から陽子への変換であり，クォークの波動関数が効く部分である．つまり，ここには強い相互作用の寄与が入っている．第 1 行と第 2 行を比較すると，ベクトル部分は強い相互作用による補正を受けた後でも，結合定数がもとの基本結合定数と等しいことがわかる．このことから弱い相互作用のベクト

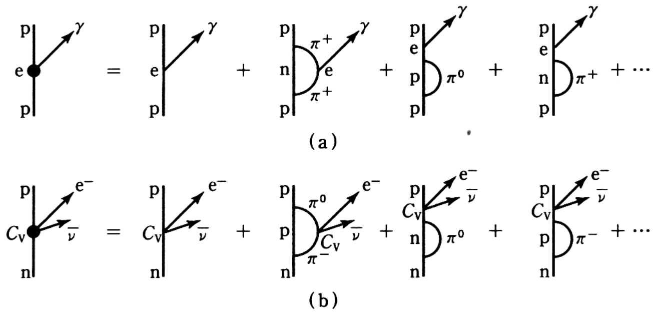


図 10.9 CVC の場合に結合定数がくりこみにより変わらないことの模式図
電磁相互作用結合の大きさは電荷保存則により強い相互作用による補正 ((a) 図右側) があっても常に同じであることが保証される．弱い相互作用でもカレントが保存すれば，つまり弱荷 (電荷に相当) が保存されていれば，強い相互作用の補正があっても結合定数の大きさは変わらない．$e^-\nu$ を W^- で置き換えれば対応がはっきりする．

ル部分は保存するカレントであるという考えが生まれた．すなわち，

$$\partial_\mu j_W{}^{+\mu} \equiv \partial_\mu \bar{p}\gamma^\mu n = \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \tau^+ \psi = 0 \tag{10.68}$$

$$\psi = \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix}, \qquad \tau_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

この考えは，強い相互作用を受けるハドロンの電荷が，強い相互作用のないレプトンの電荷と同一であるのは電流保存則によって保証されているという事実から類推されたことである．

$$\partial_\mu j_{EM}{}^\mu = \partial \bar{p}\gamma^\mu p = \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \left(\frac{1+\tau_3}{2}\right)\psi = 0 \tag{10.69 a}$$

ここで，第 2 式から第 3 式に移るときに，

$$p = \frac{1+\tau_3}{2}\psi, \quad \psi = \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{10.69 b}$$

を使った．(10.69) は，西島-ゲルマン法則の微分型をしていて，$(1+\tau_3)/2$ は $Y/2+I_3$ に対応する．(10.68) と (10.69) を比較すれば，電流の τ_3 部分と弱流 ($\propto \tau^\pm$) は同じ形をしている．このことから，両者は同一のアイソスピン保存カレント

$$\boldsymbol{j}_I{}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu(\boldsymbol{\tau}/2)\psi, \qquad \partial_\mu \boldsymbol{j}_I{}^\mu = 0 \tag{10.70}$$

の違う成分であるという考えに到達する．これを，CVC 仮説 (conserved vector current hypothesis) という[16]．

b. カイラル不変性

一方，核子の軸性カレント部分 $(\gamma^5\gamma^\mu)$ の係数は，レプトンの軸性カレントの係数と～26 %異なる．核子は強い相互作用をする粒子であるから，この部分は強い相互作用の補正を受けた結果であると考えれば，核子の部分も基本粒子つまりクォークのレベルではレプトンの部分と同じ構造をしているであろう．これは現象としては原子核の変換である β 崩壊を，核子の変換と見なしたこれまでの取り扱いをさらに一歩進めたものである．クォークで考えるときは p→u, n→d と置き換える．そうすると弱い相互作用の基本形は

$$-\mathcal{L}_{\mathrm{I}}=(G_\beta/\sqrt{2})[\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma^5)d][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu_{\mathrm{e}}] \tag{10.71}$$

でなければならない．これを V-A 相互作用という．後にアドラー (Adler) とワイスバーガー (Weisberger) はカレント代数と PCAC (partially conserved axial current) 仮説 (ハドロンカレントのうちの軸性部分 $j^{5\mu}$ が完全には保存しないもののほぼ保存するという仮説．実際には $\partial_\mu j^{5\mu}=a\langle\pi\rangle$ とおく) を使って，$|C_{\mathrm{A}}/C_{\mathrm{V}}|=1.26$ を πN 断面積から導くことに成功したので[17]，上記の考えを裏付けたことになる．(10.71) は，簡潔できれいな形をしていて，理論的にはカイラル変換

$$\psi \longrightarrow \exp(i\gamma^5\alpha)\psi, \qquad \psi^\dagger \longrightarrow \psi^\dagger\exp(-i\gamma^5\alpha) \tag{10.72}$$

に対する不変性から導かれるものと一致する[18]．また，V-A 型は 2 成分ニュートリノに基づく議論[19] などからも推察されていた．カイラル不変性はフェルミオンの質量が 0 であるときに成立する対称性であり，右巻きの世界と左巻きの世界を完全に分離して独立なものにする．上記のカイラル不変性および CVC 仮説は統一理論へ向けて重要な視点を提供することになる．

c. CVC の実験的検証

i) β 崩壊の弱磁気モーメント　陽子の電磁カレントは，電荷 e を取り出せば，ローレンツ共変性より

$$\begin{aligned}J_{\mathrm{EM}}{}^\mu &=\langle p'|\bar{p}\gamma^\mu p|p\rangle\\ &=\bar{u}(p')\left[F_{\mathrm{p1}}(q^2)\gamma^\mu+\frac{\chi_{\mathrm{p}}}{2m_{\mathrm{p}}}F_{\mathrm{p2}}(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]u(p)\end{aligned} \tag{10.73}$$

$$q^2=(p-p')^2$$

と書ける．ただし，$F_{\mathrm{p1}}(0)=1$，$F_{\mathrm{p2}}(0)=1$ で，χ_{p} は，$e/2m_{\mathrm{p}}$ を単位とした陽子

の異常磁気能率である（後述，§12.2.2の「核子の電磁形状因子」参照）．中性子の電磁カレントは指標p→nとすればよい．中性子の電荷は0であるが，異常磁気能率はもっているので，$F_{n1}(0)=0$，$F_{n2}(0)=1$となる．(10.69)と(10.73)を比較すれば，(10.69)のτ_3部分は

$$j_3{}^{\mu}=\bar{\psi}\left[F_{V1}(q^2)\gamma^{\mu}+\frac{\chi_V}{2m_p}F_{V2}(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}\right]\frac{\tau_3}{2}\psi \qquad (10.74\,a)$$

$$F_{V1}=F_{p1}-F_{n1}\xrightarrow{q^2\to 0}1$$

$$\chi_V F_{V2}=\chi_p F_{p2}-\chi_n F_{n2}\longrightarrow \chi_p-\chi_n \qquad (10.74\,b)$$

CVC仮説は弱い相互作用の荷電カレント(10.68)が，(10.74)の[…]の中と同一であることを意味する．すなわち弱カレントのベクトル部分が

$$j_W{}^{+\mu}=\bar{\psi}\left[F_{V1}(q^2)\gamma^{\mu}+\frac{\chi_V}{2m_p}F_{V2}(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}\right]\tau^{+}\psi \qquad (10.75)$$

と表されることになる．したがって，(10.75)の[　]の中の第2項が核子の異常磁気能率で表されるという事実（弱磁気項という）を確かめればCVC仮説の検証ができる．この項はqに比例するのでβ崩壊の許容遷移には寄与しない．この効果を見るには，これまでの近似を一歩進めてβ崩壊の禁止遷移を取り入れる必要がある．原子核理論に深入りすることは本意でないので，ここでの議論はこれ以上進めないことにする．しかし，歴史的にはこの弱磁気項を測定して，CVC仮説の正しいことが実験的に最初に確かめられたのであった[20]．

別の検証法は，高エネルギーニュートリノによる陽子（準）弾性散乱[ν_μ+p→$\nu_\mu(\mu^-)$+p]散乱を行い，電子-陽子弾性散乱(e+p→e+p)と同じq^2依存性をもつかどうかを見ることである[21)*6)]．ここではCVC効果をπの崩壊で考察することにしよう．

ii)　$\pi^+\to\pi^0+e^++\nu$　　$\pi^{\pm}$の電流は，西島-ゲルマンの法則を使えば，アイソスピンの第3成分I_3に比例するから，電荷eを除くとローレンツ不変性を考慮して，

*6)　これは中性カレント反応であるので，実際に行われるのはずっと後，標準理論確立以後のこととなる．

$$J_{EM}{}^{\mu}=\langle \pi^+(k')|j_{EM}{}^{\mu}(x)|\pi^+(k)\rangle$$
$$=[F_1(q^2)(k'^{\mu}+k^{\mu})+F_2(q^2)(k'^{\mu}-k^{\mu})]\langle \pi^+|I_3|\pi^+\rangle e^{-iqx}$$
$$q^2=(k'-k)^2 \tag{10.76}$$

のように書ける．静的極限 $(q^2=0)$ で，電荷が1になるように規格化してあるので $F_1(0)=1$ となる．電流保存則より

$$\partial_{\mu}j_{EM}{}^{\mu}=0$$
$$\therefore \quad F_1(q^2)(k'^2-k^2)+F_2(q^2)(k'-k)^2=0 \tag{10.77}$$

$k'^2=k^2=m_{\pi}{}^2$ を入れると，$F_2(q^2)=0$ となるから，

$$J_{EM}{}^{\mu}=(k'^{\mu}+k^{\mu})F_1\langle f|I_3|i\rangle e^{-iqx} \tag{10.78}$$

となる．一方，弱カレントはCVC仮説によれば，結合の大きさ G_{β} は別として

$$J_{W}{}^{\mu}=(k'^{\mu}+k^{\mu})F_1\langle f|I_{-}|i\rangle e^{-iqx} \tag{10.79}$$

である．ここで，アイソスピン演算子は行列表示をとれば

$$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, \qquad I_{-}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix} \tag{10.80}$$

$I_{-}|\pi^+\rangle=\sqrt{2}|\pi^0\rangle$ で与えられる（付録D，式(D.3)，(D.9 a)）．したがって，π^+ の崩壊振幅は，q^2 は小さいので，近似的に $F_1(q^2)\simeq F_1(0)=1$ とおいて

$$\mathcal{M}(\pi^+\to\pi^0 e^+\nu)=(G_{\beta}/\sqrt{2})\sqrt{2}(k'_{\mu}+k_{\mu})\langle e\nu|\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)e|0\rangle \tag{10.81}$$

$\Delta=m_{\pi^+}-m_{\pi^0}$ とすると，$\Delta\ll m_{\pi^0}$ であるので，π^0 の運動エネルギーを無視することにすれば，$k'^{\mu}+k^{\mu}=2m_{\pi}\delta_{\mu 0}$ となる．

$$\Gamma=\frac{G_{\beta}{}^2\Delta^5}{30\pi^3}R\left(\frac{m_e}{\Delta}\right)\simeq 0.393\ \mathrm{sec}^{-1} \tag{10.82 a}$$

$$R(x)=\sqrt{1-x^2}\left(1-\frac{9}{2}x^2-4x^4\right)+\frac{15}{2}x^4\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \tag{10.82 b}$$

を得る[22]．実験値は $0.394\pm0.01\ \mathrm{sec}^{-1}$ であり，一致は非常に良い．

10.4 ストレンジ粒子の崩壊

10.4.1 $\Delta S=\Delta Q$ 則

ストレンジネスをもつ粒子は，既知の u, d クォークから成るハドロンと同

じ相互作用をしないかもしれない．そこでまず現象論を確立して既知の理論が適用できるかをテストする必要がある．β 崩壊ラグランジアン密度のハドロン部カレントが

$$j^{\mu} \sim \bar{u}\gamma^{\mu}(1-\gamma^{5})d \tag{10.83}$$

で表されることを考えると，ストレンジネスをもつ粒子の崩壊を引き起こすカレントは

$$j^{\mu} \sim \bar{u}\gamma^{\mu}(1-\gamma^{5})s \tag{10.84}$$

と考え，レプトン部は同じと見なすのが自然であろう．この仮定をすると，$\mathrm{K}^{\pm} \to \mathrm{e}^{\pm}+\nu$ と $\mathrm{K}^{\pm} \to \mu^{\pm}+\nu$ との相対分岐比については，$\pi \to l\nu$（l=e または μ）の崩壊と全く同じ議論ができて，π 崩壊の（10.30）に対応する式

$$\frac{\Gamma(\mathrm{K} \to \mathrm{e}\nu)}{\Gamma(\mathrm{K} \to \mu\nu)} = \frac{m_{\mathrm{e}}{}^{2}(m_{\mathrm{K}}{}^{2}-m_{\mathrm{e}}{}^{2})^{2}}{m_{\mu}{}^{2}(m_{\mathrm{K}}{}^{2}-m_{\mu}{}^{2})^{2}} \tag{10.85}$$

が導ける．これが実験値 2.5×10^{-5} と非常に良く合っていることは，上記の仮定が正しいことを裏付ける．ハドロン部について（10.84）を仮定すれば，これは s を消して u をつくる（およびその逆）演算子であるから，ハドロン部分については反応の前後で，

$$\varDelta S = \pm 1, \quad \varDelta S = \varDelta Q, \quad \varDelta I = 1/2 \tag{10.86}$$

が成立することが予想される．これは西島-ゲルマンの法則

$$Q = I_{3} + (B+S)/2$$

からすぐわかることである．実際観察されているレプトン崩壊例

$$\mathrm{K}^{+} \longrightarrow \pi^{0}+\mathrm{e}^{+}+\nu \tag{10.87 a}$$

$$\mathrm{K}^{-} \longrightarrow \pi^{0}+\mathrm{e}^{-}+\bar{\nu} \tag{10.87 b}$$

$$\mathrm{K_L}^{0} \longrightarrow \pi^{-}+\mathrm{e}^{+}+\nu \tag{10.87 c}$$

$$\mathrm{K_L}^{0} \longrightarrow \pi^{+}+\mathrm{e}^{-}+\bar{\nu} \tag{10.87 d}$$

$$\Lambda \longrightarrow \mathrm{p}+\mathrm{e}^{-}+\bar{\nu} \tag{10.87 e}$$

$$\Sigma^{-} \longrightarrow \mathrm{n}+\mathrm{e}^{-}+\bar{\nu} \tag{10.87 f}$$

$$\Xi^{0} \longrightarrow \Sigma^{+}+\mathrm{e}^{-}+\nu \tag{10.87 g}$$

を眺めれば，これらの規則性はかなり明白である．

一方，$\varDelta S = -\varDelta Q$ に当てはまる

$$\Sigma^{+} \longrightarrow \mathrm{n}+\mathrm{e}^{+}+\bar{\nu} \tag{10.88}$$

反応は観測されておらず，(10.87 f) の反応に対する崩壊率の比は 0.043 以下である．これはクォークで考えるとわかりやすい．Σ^- は dds であるので，この中の s が u に変化すれば中性子になるが，Σ^+ は uus であるので，s が u に変化しても中性子の udd にはなれないのである．また，$K_L{}^0$ は $S=1$ と -1 の混合状態であるから，$\pi^\pm l^\mp \nu$ への崩壊は，ΔQ が ± 1 を満たすのでともに可能のように見える．しかし，K_L の親 (K^0 または $\bar{K}^0$) を同定すれば一方は $\Delta S/\Delta Q=-1$ となるはずである．そこで K^0 または $\bar{K}^0$ を生成反応で確認した後，$K_L \to \pi^\pm + e^\mp + \nu$ で測れる観測量

$$x=\frac{\langle \pi^- e^+ \nu | T | \bar{K}^0 \rangle (\Delta S=-\Delta Q \text{ 反応})}{\langle \pi^- e^+ \nu | T | K^0 \rangle (\Delta S=\Delta Q \text{ 反応})} \tag{10.89}$$

を調べてみると現在の値は[5]，

$$\mathrm{Re}\,x=0.006\pm 0.018, \qquad \mathrm{Im}\,x=-0.003\pm 0.026 \tag{10.90}$$

であり，0 と矛盾しない．

10.4.2 $\Delta I=1/2$ 則

$\Delta I=1/2$ 則が，レプトン崩壊で成立するのは理解可能であるが，ハドロン崩壊では例えば

$$\Lambda \longrightarrow p+\pi^-, \qquad \Lambda \longrightarrow n+\pi^0 \tag{10.91}$$

のとき

$$T_{fi}=G_S \langle p | \bar{u}\gamma^\mu (1-\gamma^5) s | \Lambda \rangle \langle \pi^- | \bar{d}\gamma_\mu (1-\gamma^5) u | 0 \rangle \tag{10.92}$$

のように，$\Delta I=1/2$ カレントと，$\Delta I=1$ カレントの積が効くから $\Delta I=1/2$ と $\Delta I=3/2$ と両方あってもよい．しかし，実験的にはハドロン崩壊の場合でも $\Delta I=1/2$ 則がよい近似で成立している．例えば上の反応で，$\Delta I=1/2$ を要求すると，

$$\frac{\Gamma(\Lambda \to n\pi^0)}{\Gamma(\Lambda \to n\pi^0)+\Gamma(\Lambda \to p\pi^-)}=\frac{1}{3} \tag{10.93}$$

となる．位相体積の差による補正を入れて，右辺は 0.345 となるが，実験値は 0.358±0.005 である．また $K^+ \to \pi^+\pi^0 (I=2)$ は，$\Delta I=3/2$ の過程であるが (演習 10.6)，$\Delta I=1/2$ の過程 $K_S{}^0 \to \pi\pi (I=0)$ に比べ，

$$\frac{\Gamma(K^+ \to \pi^+\pi^0 (I=2))}{\Gamma(K_S{}^0 \to \pi\pi (I=0))}=4\times 10^{-2} \tag{10.94}$$

と非常に小さい．この $\Delta I=1/2$ 則の原因は強い相互作用力学に原因があると考えられているが，まだ十分解明されておらず QCD の課題となっている．

演習 10.6　$\pi^+\pi^0$ 状態は $J=0$ のとき $I=1$ となれない．したがって，$\Delta I=1/2$ 則が成立すれば $K^+\to\pi^+\pi^0$ は禁止される．なぜか？

演習 10.7　$\Delta I=1/2$ 則を使って，次の式を証明せよ．

（1）
$$\frac{\Gamma(K_S\to\pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_S\to\pi^0\pi^0)}=\frac{\Gamma(K_L\to\pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_L\to\pi^0\pi^0)}=2 \tag{10.95}$$

（2）
$$\frac{\Gamma(\Xi^-\to\Lambda\pi^-)}{\Gamma(\Xi^0\to\Lambda\pi^0)}=2 \tag{10.96}$$

（3）a^+, a^-, a^0 をそれぞれ $\Sigma^+\to n\pi^+$, $\Sigma^-\to n\pi^-$, $\Sigma^+\to p\pi^0$ の振幅とすると，
$$a^++\sqrt{2}a^0=a^- \tag{10.97}$$

ヒント　この計算には $I=1/2$ をもつスプーリオンという仮想の粒子を仮定し，スプーリオンと K の散乱反応でアイソスピンが保存すると考えて行うと便利である(アイソスピン解析については，§6.6.3 参照)．

10.4.3　$K^+\to\pi^0 l^+\nu$ (Kl_3^+ 崩壊)

a．崩　壊　率

$|\Delta S|=1$ を満たす崩壊として，ここでは代表的に，$K^+\to\pi^0 l^+\nu$ ($l=e$ または μ) の崩壊を取り上げる．この過程は $\pi^+\to\pi^0 e\nu$ と運動学的には同じであるので，結合定数を G_S とすると崩壊振幅は，

$$T_{fi}=\frac{G_S}{\sqrt{2}}\langle\pi^0(k_\pi)|\,\bar{s}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u|K^+(k_K)\rangle\langle l^+\nu|\,\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma^5)l|0\rangle$$
$$=(G_S/\sqrt{2})S^\mu l_\mu \tag{10.98}$$

$$S^\mu=\langle\pi^0(k_\pi)|\,\bar{s}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u|K^+(k_K)\rangle$$
$$=f_+(q^2)(k_K{}^\mu+k_\pi{}^\mu)+f_-(q^2)(k_K{}^\mu-k_\pi{}^\mu) \tag{10.99 a}$$
$$l_\mu=\bar{u}(p_\nu)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_e) \tag{10.99 b}$$

K と π はともにパリティが負なので，軸性ベクトル部分は寄与しない．$f_\pm$ は $q^2=(k_K-k_\pi)^2$ の関数であり，T 不変が成立していれば実数である．

$$k_K-k_\pi=p_e+p_\nu,\qquad k_K+k_\pi=2k_K-(p_e+p_\nu)$$

であり，レプトンカレントに掛けるとレプトン運動量の部分はレプトン質量に比例する．したがってレプトンが電子の場合は f_- の項は無視してよい．CVC 仮説により，保存するアイソスピンカレントの存在が導かれたように，ここで

もベクトルカレントは保存すると考えるとアイソスピンの拡張である $SU(3)$ 対称が適用できて，$f_+(0)$ は $1/\sqrt{2}$ になる（$SU(3)$ 対称は厳密でないので実際はわずか $(1 \rightarrow 0.982 \pm 0.008)$[23)]）にずれる．実験データの解析は，通常

$$f_\pm(q^2) = f_\pm(0)(1+\lambda_\pm(q^2/m_\pi{}^2)) \tag{10.100}$$

のようにパラメター化して行う．$K_{\mu3}$ では，$f_\pm$ が両方決められるが，K_{e3} では，f_+ のみが決まる．K_{e3} の電子または π のエネルギースペクトルは (10.99) から計算できる．$m_l=0$ とおけば

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}E_l} = \frac{G_S{}^2}{2\pi^3}|f_+|^2 m_K E_l{}^2 \frac{(E_{\max}-E_l)^2}{(m_K-2E_l)} \tag{10.101 a}$$

$$E_{\max} = \frac{m_K{}^2 - m_\pi{}^2}{2m_K} \tag{10.101 b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}E_\pi} = \frac{G_S{}^2}{12\pi^3}|f_+|^2 m_K k_\pi{}^3 \tag{10.102}$$

となる．ただし，(10.101 a) を求めるときは，f_+ の q^2 依存性を無視して定数とした．これらの式は，実験と比較すると良く合う（図 10.10)．このことから，K_{e3} 崩壊はベクトル型で説明できることがわかる．$q^2=(k_K-k_\pi)^2=m_K{}^2+m_\pi{}^2-2m_K E_\pi$ は，E_π のみの関数であるから，π のエネルギースペクトルを精密に測定すれば，$f_\pm(q^2)$ を求めることができる．$\lambda_\pm$ の現在の値は[5)]

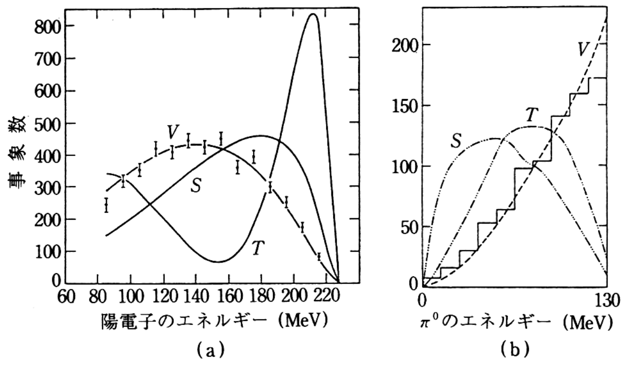


図 10.10　$K_{e3}(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e)$ 崩壊における陽電子 (a) および π^0 (b) のエネルギースペクトル[24)]
図中にはテンソル(T)もしくはスカラー(S)型相互作用を仮定したときの線も描いてある．

$$\lambda_+ = 0.028 \pm 0.004$$

$$\xi \equiv \lambda_- / \lambda_+ = -0.35 \pm 0.15$$

$$\mathrm{Im}\,\xi = -0.017 \pm 0.025 \quad (K_{\mu 3} \text{ の } \mu \text{ 偏極より}) \tag{10.103}$$

である．虚数部の情報は，T 不変を破る量（μ の横偏極：$\boldsymbol{P}_\mu \cdot \boldsymbol{k}_\pi \times \boldsymbol{p}_\mu$）の観測から得られる．上の値からわかるように T 非保存の兆候は得られていない．

b．相互作用の形

相互作用の形をスカラーまたはテンソルとしたとき，すなわち振幅が

$$2m_K f_S \bar{\nu}(1-\gamma^5)e + (2f_T/m_K)k_K{}^\mu k_\pi{}^\nu \bar{\nu}\sigma_{\mu\nu}(1-\gamma^5)e \tag{10.104}$$

のときとV-Aのとき（(10.98)）とについて，電子と π^0 のエネルギー分布を図10.10に示す．ただし，f_S, f_T はベクトル形状因子に対応するスカラーおよびテンソルの形状因子である．このデータから，ストレンジネスの変わる崩壊でも，V-Aがよいということがわかる．

結合定数 G_S は全崩壊率をデータと比較して得られる．(10.101) または (10.102) を積分して

$$\Gamma = \frac{G_S{}^2 f_+{}^2 m_K{}^5}{768\pi^3} f\left(\frac{m_\pi{}^2}{m_K{}^2}\right) \tag{10.105}$$

$f(y)$ は，ミューオン全崩壊率 (10.57 b) の $f(y)$ と同じ関数で

$$f(y) = 1 - 8y + 8y^3 - y^4 - 12y^2 \ln y \tag{10.106}$$

で与えられる．$m_\pi/m_K = 0.273$ のとき，$f(y) = 0.579$ である．実験値 $\tau_K = 1.2371 \pm 0.0029 \times 10^{-8}$ sec, $\mathrm{BR}(K^+ \to \pi^0 e^+ \nu) = 0.0482 \pm 0.0006$ を入れて計算すると

$$G_S / G_\beta \sim 0.22 \tag{10.107}$$

が得られる．

演習 10.8* (10.101), (10.102), (10.105) を導け[22]．

10.4.4 カビボ回転

β 崩壊や μ 崩壊から決められた弱い相互作用の“形”はストレンジネスの変わる反応にもそのまま適用できることがわかった．しかし，崩壊率を実験データに合わせるとストレンジネスの変わる反応での結合定数 $G_S{}^2$ は，そうでないときの結合定数 $G_\beta{}^2$ の約 1/20 と非常に小さい．このことは，Kのレプト

ン崩壊のみならず一般にストレンジネスの変わる崩壊について実験的にいえることである．つまりストレンジ粒子のもつ弱い力の強さは，ストレンジネスの変わる ($\Delta S \neq 0$) 反応ではすべて同じという普遍性が成立しているものの，$\Delta S=0$ の反応と $\Delta S \neq 0$の反応との間には普遍性が成り立たない．この状況を救ったのがカビボ (N. Cabibbo) である[25]．

カビボは次のように考えた．存在する相互作用の種類により，状態を記述する適切な量子状態が変わるということは量子力学では始終見られることである．例えば中心力だけのときは軌道角運動量 l は良い量子数であり，球面調和関数は状態を記述する良い波動関数である．しかし，スピン軌道結合力が存在すると，全角運動量 J が良い量子数であり，このときの固有状態は l の違う状態を混ぜる必要がある．カビボは弱い相互作用を行うときの粒子状態は必ずしも質量の固有状態である必要はなくその混合状態であると考えて，d の代わりに

$$d' = \cos\theta_c\, d + \sin\theta_c\, s \tag{10.108}$$

が，u と組んで荷電カレント

$$j^{+\mu} = \bar{u}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)d' \tag{10.109}$$

をつくると提案した．これをカビボ回転という*7)．この考えに従えば，弱い力の強さを表す量 G_μ は普遍定数である．しかし実際に起こる反応は d′ の純粋状態ではなく，s, d を取り出して見ている．したがって，取り扱う粒子が，弱い力の稼働状況においての“良い量子状態”の中にどれだけ含まれているかの成分比 (の自乗が) が反応率に入るのである．この成分比がカビボ回転で与えられる．カビボ回転を使うと $G_S = G_\mu \sin\theta_c$ となり，K_{e3} のデータからは[27]，

$$\sin\theta_c = 0.220 \pm 0.002 \tag{10.110 a}$$

が得られる．このほか，Λ の β 崩壊からは[28]，

$$\sin\theta_c = 0.231 \pm 0.003 \tag{10.110 b}$$

が得られ，平均すれば

$$\sin\theta_c = 0.221 \pm 0.002 \;{}^{*8)} \tag{10.110 c}$$

---

*7) 同様の考えは，4 元坂田モデルでも考えられていたが[26]，あまり注目されなかった．

*8) t, b クォークを含む 3 世代へ拡張されると，カビボ回転は 3×3 小林-益川行列になる．その場合この値は，V_{12} もしくは V_{us} と見なすべき量である．

となる．厳密にいえば，上でテストした反応には，相互作用のベクトル部分しか効かないから，この値はベクトル部分の結合定数について適用すべきものであるが，軸性ベクトル部分についても同様の値が得られた．結局，ストレンジネスの変わる反応においても，カビボ角というパラメターを一つ導入する以外は，同じ形の V-A 型相互作用が成立することがわかった．

カビボの提案は，β 崩壊の結合定数は，$G_\beta = G_\mu \cos\theta_c$ であることを示している．一方，レプトンにはカビボ回転は適用されないから，そこでの G_μ には，$\cos\theta_c$ の補正はない．μ 崩壊から決められた G_μ と，β 崩壊から決められた G_β には，わずかではあるが有為な差があるから (10.61)，この差を $\cos\theta_c$ とすると，やはり同じカビボ角を与えることがわかった．これより

$$\cos\theta_c = 0.973 \pm 0.002 \text{ *9)} \tag{10.111}$$

これらのことから，真の弱い相互作用定数としては，μ 崩壊から得られる G_μ を使用すべきことがわかる．以下フェルミに敬意を表して，G_F と書く．

10.5　タウレプトン[29)]

τ レプトンの発見は比較的新しく (1975 年)，電子，μ とともに裸で観測可能な数少ない質点粒子の一つである．また，τ の崩壊は μ の崩壊と類似点が多く，弱相互作用の普遍性を調べるのに適している．種々の性質の決め方を少し詳しく述べる．

10.5.1　質量とスピン

e^+e^- 反応

$$e^+ + e^- \longrightarrow \tau^+ + \tau^- \tag{10.112}$$

において対生成を起こすに十分なエネルギー (全重心系エネルギー $\sqrt{s} \gg 2m_\tau$) があれば，スピン 1/2 の点粒子の対生成全断面積 σ_{pt} は

---

*9)　*8) と同じ理由でこの値は V_{11} もしくは V_{ud} と見なすべき量である．小林-益川行列のユニタリー性から

$$|V_{11}|^2 + |V_{12}|^2 + |V_{13}|^2 = 1$$

が成立するので $|V_{11}|^2 + |V_{12}|^2$ は必ずしも 1 に等しくなくてもよいが，たまたま $|V_{13}|^2 \simeq 0$ であったので，2 世代で閉じるカビボ回転がよく成立したのである．

$$\sigma_{\rm pt}=4\pi\alpha^2/3s \tag{10.113}$$

である．これは，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$ に共通である．$\sqrt{s}\simeq 2m_\tau$ のしきい値付近では，質量 (m_τ) の影響つまり非相対論効果の補正が必要であり，速度を $\beta=p_\tau/E_\tau$, $\gamma=(1-\beta^2)^{-1}$ として

$$\sigma_{\tau\tau}=\sigma_{\rm pt}F(\beta) \tag{10.114}$$

と書ける．$F(\beta)$ はスピンによって異なり，

$$F(\beta)=\begin{cases}\beta(3-\beta^2)/2 & :s=1/2 \quad (10.115\,\mathrm{a})\\ \beta^3/4 & :s=1 \quad (10.115\,\mathrm{b})\\ (\beta/9)(15\gamma^{-2}+30\beta^2+40\gamma^2\beta^4+16\gamma^4\beta^6) & :s=3/2 \quad (10.115\,\mathrm{c})\end{cases}$$

であるので，しきい値付近の断面積の振る舞いを調べることによって，質量と

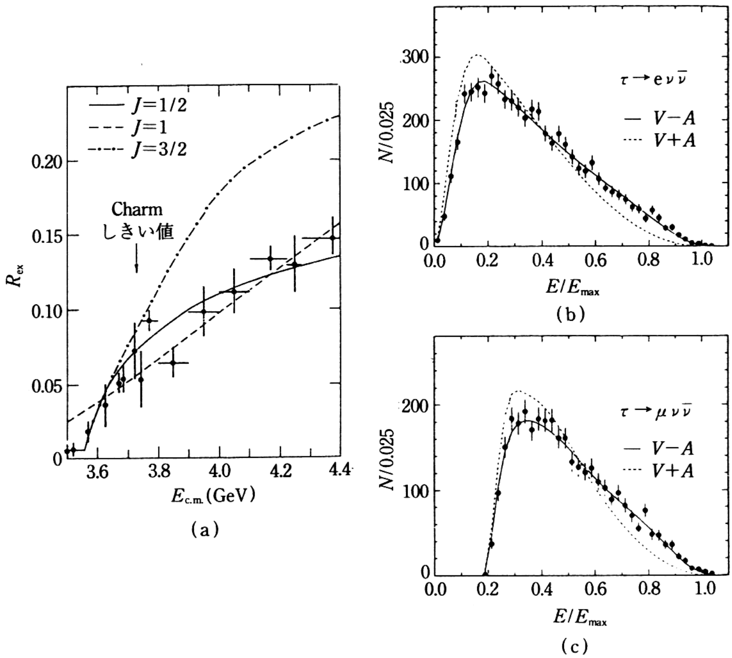


図 10.11　(a)　τ レプトン生成のしきい値付近の立ち上がりと形から質量とスピンが決められる．τ 生成断面積と点粒子生成断面積との比 R をエネルギーの関数としてプロットしてある．曲線はしきい値とスピンを仮定して最適化したもの[30]．
(b)　$\tau \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$ (c) $\tau \to \mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$ の電子およびミューオンのエネルギースペクトルによりミシェルパラメター ρ を決める．

スピン(1/2)が同時に決められる(図10.11)[30]. 最近のデータによれば[5]

$$m_\tau = 1777.0 \pm 0.3\ \mathrm{MeV} \tag{10.116}$$

10.5.2 結　合　型

τ は μ 崩壊と同じく

$$\tau^- \longrightarrow \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} + \nu_\tau \tag{10.117 a}$$

$$\tau^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \tag{10.117 b}$$

のように崩壊するので, 電子のエネルギースペクトルを調べることによりミシェルパラメターが決められる(図10.11 (b), (c))[5,31].

$$\rho = 0.742 \pm 0.022 \tag{10.118}$$

となっており, V-A 型 ($\rho = 3/4$) に一致する.

10.5.3 普　遍　性

τ のレプトンへの崩壊率は, μ の崩壊率と同じようにして計算できる. μ と電子の質量を τ に比べて無視すれば, (10.56) で m_μ を m_τ に置き換えて,

$$\Gamma(\tau^- \to \mathrm{e}^-\,\bar{\nu}_\mathrm{e}\nu_\tau) = \frac{{G_\tau}^2 {m_\tau}^5}{192\pi^3} \tag{10.119}$$

したがって, τ の寿命 τ_τ は,

$$\tau_\tau = \tau_\mu (G_\mu/G_\tau)^2 (m_\mu/m_\tau)^5 \mathrm{BR}(\tau^- \to \mathrm{e}^-\,\bar{\nu}_\mathrm{e}\nu_\tau) \tag{10.120}$$

$G_\tau = G_\mu$ として, 実験値[5] $m_\tau = 1777.0 \pm 0.3$ MeV, $m_\mu = 105.658389 \pm 0.000034$ MeV, $\tau_\mu = 2.19703 \pm 0.00004$ sec, BR $= 0.1783 \pm 0.0008$ を入れて計算した τ の寿命の結果は, 実験値 $\tau_\tau(\mathrm{exp}) = 2.910 \pm 0.015 \times 10^{-13}$ sec と誤差の範囲でほぼ一致する. 逆に実験値から τ と μ 結合定数の普遍性のチェックができて,

$$\frac{G_\tau}{G_\mu} = 0.999 \pm 0.006 \tag{10.121}$$

となる[29,32]. 普遍性は成り立っているといってよかろう.

10.5.4 分　岐　比

上の計算では, 分岐比は実験値を使ったが, 理論的算出も可能である. τ の質量が大きいので μ と違いハドロンへの崩壊モードも存在することを考慮し

なければならない．$m_c > m_\tau$ であり，チャームクォークへは崩壊できないので，ハドロンモードとしては

$$\tau^- \longrightarrow \nu_\tau + \mathrm{d} + \bar{u} \tag{10.122 a}$$

$$\tau^- \longrightarrow \nu_\tau + \mathrm{s} + \bar{u} \tag{10.122 b}$$

のみを考えればよい．カビボ回転によって，$\mathrm{d\bar{u}}$ へは確率 $\cos^2\theta_c$ で，$\mathrm{s\bar{u}}$ へは確率 $\sin^2\theta_c$ で振り分けられるので，まとめて一つのチャネル d′ と見なせる．クォークのレベルでは，クォーク質量を無視すれば崩壊率はレプトンへの崩壊率と同一であるが，カラー自由度を考慮すると三つのチャネルが開けている．クォークは 100％ハドロン化するとすれば，電子への崩壊モードは全体の 1/5 =20％となる．これは，実験値 17.7％に近い値である．このようにクォークの数を数えるだけの議論で実験値とこれだけの一致がみられるという事実はクォークモデルの有用性を示している．QCD 力学を取り入れたもう少し精密な議論をすれば一致はもっと良い[32]．

10.6 香りの保存と世代の謎

これまでの考察からすると，e, μ, τ の 3 種のレプトンは，質量が違うことを除けば全く同じ性質をもっている．種々の反応率なども，質量値を置き換えるのみで正確に再現できる．にもかかわらず e, μ, τ は付随するニュートリノとともに固有の量子数（レプトンの香りといい，(ν_e, e^-) は e 数，(ν_μ, μ^-) は μ 数，(ν_τ, τ^-) は τ 数と名付ける）をもっており，入り混じることはない．

ニュートリノは 3 種類あり，それぞれ別の香りをもつことは，次の事実からいえる．μ および τ の純レプトン崩壊（$\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$, $\tau^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$, $e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$）でのレプトンスペクトルから，それぞれ少なくとも 2 種のスピン 1/2 の中性粒子（ニュートリノと呼ぶ）が存在することがわかっている．μ 崩壊の中の ν_e と ν_μ が違う香りをもち，かつこの香りが保存することは，次のようにしていえる．ν_e と ν_μ が少しでも混合すれば，μ は仮想的に W を放出して ν_μ になり，ν_μ は混合によって ν_e になり，W を最吸収して電子に変われる．W はフォトンを放出できるから，$\mu \to e\gamma$ が可能となる．歴史的には $\mathrm{BR}(\mu \to e\gamma)$ が小さいことから，$\nu_\mu \neq \nu_e$ が推論され，ブルックヘブンでのニュートリノ実

験結果[33)]

$$\begin{aligned}&\sigma(\nu_\mu+\mathrm{n}\to\mu^-+\mathrm{p})\simeq\sigma\,(\mathrm{theory})\\&\sigma(\nu_\mu+\mathrm{n}\to\mathrm{e}^-+\mathrm{p})\qquad \text{存在せず}\end{aligned}\tag{10.123}$$

で確認されたのであった．今日では，ν_μ は $\pi^+(\mathrm{K}^+)\to\mu^+\nu_\mu$ から，ν_e は，$\mu^+\to\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e}\bar{\nu}_\mu$, $\mathrm{K}\to\pi\mathrm{e}^-\nu_\mathrm{e}$ から得られ，日常的に実験に供与されている．

$\nu_\tau\neq\nu_\mathrm{e}$ は，$\tau\to\mathrm{e}\gamma$ がないことから，$\nu_\tau\neq\nu_\mu$ は，$\tau\to\mu\gamma$ のないことあるいは，ν_μ ビームで τ レプトンがつくれないことからいえる．

レプトン反応で香りが保存することの精密テストは，以下のような香りを保存しない反応の存在をチェックすることにより得られる[5)]．

$$\begin{aligned}&\mathrm{BR}(\mu\to\mathrm{e}\gamma) && <4.9\times10^{-11}\\&\mathrm{BR}(\mu\to\mathrm{e}\bar{\mathrm{e}}\mathrm{e}) && <1.0\times10^{-12}\\&\mathrm{BR}(\tau\to\mathrm{e}\gamma) && <1.1\times10^{-4}\\&\mathrm{BR}(\tau\to\mu\gamma) && <4.2\times10^{-6}\\&\mathrm{BR}(\tau\to3l) && <3.3\times10^{-6}\\&\mathrm{BR}(\mathrm{Z}\to l_1l_2)(l_1\neq l_2) && <1.7\times10^{-6}(\mathrm{e}\mu)\end{aligned}\tag{10.124}$$

今日ではレプトンの香りの保存則は前提として受け入れられている．すなわち，標準理論の範囲では，混合は存在せず香りは保存される．仮に混合が存在しても，崩壊率を計算すると，$(m_\nu/m_\mathrm{W})^2$ に比例し[34)]，実験上限値よりもはるかに小さい値を与えるので，崩壊現象では見つけにくいと考えられる[*10)]．

同じ性質をもつ粒子がなぜ繰り返して現れるのか？　というのが e-μ-τ の謎（世代の謎ともいわれる．同じ疑問がクォークにも存在するからである）である．一つの考えは，三者を区別する未知の性質（量子数）が存在するということであり，もう一つはレプトンより基本的な下部階層が存在しレプトンはその複合体であると仮定することである．この場合 μ,τ は電子の励起状態となる．現時点ではモデルを区別するヒントは存在しない．

[*10)] ニュートリノについては，混合が存在すればニュートリノ振動（$\nu_\mathrm{e}\leftrightarrow\nu_\mu\leftrightarrow\nu_\tau$ 間の遷移）という現象が起きる（演習 2.13 参照）．最近スーパーカミオカンデグループが，大気ニュートリノの天頂角分布から，ν_μ が他種のニュートリノ（多分 ν_τ）に変わる振動現象の存在を確認した[35)]．この現象は標準理論の枠組を越えた取扱いを必要とする．

10.7　統一理論への道標

10.7.1　中間ボソン W$^{\pm}$

これまで，弱い相互作用を概観してきたが，まとめると次の形に要約できる．

$$\mathcal{H}_W = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} J^{+}{}_{L}{}^{\mu} J^{-}{}_{L\mu} \tag{10.125}$$

$$J^{-}{}_{L\mu} = (J^{+}{}_{L\mu})^{\dagger}, \qquad J^{+}{}_{L}{}^{\mu} = J_{qL}{}^{\mu} + J_{lL}{}^{\mu}$$

$$J_{qL}{}^{\mu} = \bar{u}_L \gamma^{\mu} d_L', \qquad d' = \cos\theta_c\, d + \sin\theta_c\, s$$

$$J_{lL}{}^{\mu} = \bar{\nu}_{eL} \gamma^{\mu} e_L + \bar{\nu}_{\mu L} \gamma^{\mu} \mu_L + \bar{\nu}_{\tau L} \gamma^{\mu} \tau_L$$

$$e_L = \frac{1-\gamma^5}{2} e, \text{etc.}$$

すなわちすべての素粒子の弱い相互作用は同じ結合定数 G_F をもつ普遍 V-A 型である．V-A 型であるという代わりに，粒子 ψ のカイラリティ負状態を ψ_L と書き，ψ_L のみが弱い力の源である“弱荷”をもつものとすると，弱い力は普遍ベクトル型であるともいえる．結局のところフェルミの直感は正しかったと結論できる．

W$^{\pm}$ 粒子の導入

1935 年フェルミが弱い相互作用理論を提案したと同じ頃，湯川は中間子論を提唱した．これは核力を π 中間子の交換で説明しようとするものである．湯川は同じ π が弱い相互作用をも媒介するという方式で β 崩壊を説明しようとしたがこれはうまくいかなかった．しかし，“力の媒介粒子が存在する”という考えは今日の標準理論につながる先駆的な洞察である．弱い力が W 粒子により媒介されると考え[36]，W 粒子の質量を重いとすれば 4-フェルミ相互作用に一致する．これは次のようにしてみることができる．QED において電磁相互作用の 2 次の項，図 1.1 (b) に相当する遷移行列は (5.72) で導いた．

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \bar{u}_s(p_3)(-ie\gamma^{\mu}) u_r(p_1) \left(\frac{-i}{q^2 + i\varepsilon} \right) \bar{u}_m(p_4)(-ie\gamma_{\mu}) u_l(p_2) \tag{10.126}$$

$1/q^2$ はクーロンポテンシャルに相当する項である．(10.126) に対応する，フォトンを交換する過程の実効ラグランジアンは，時空座標では

$$\int \mathcal{L}_{\text{eff}} \mathrm{d}^4 x = -e^2 \int J^{\dagger}{}_{\mu}(x) D_{\text{F}}{}^{\mu\nu}(x-y) J_{\nu}(y) \mathrm{d}^4 x \mathrm{d}^4 y \quad (10.127\text{ a})$$

である．ここで，フォトンの伝播関数 D_{F} を質量のある W の伝播関数 Δ_{F} (5.135) で置き換える．

$$\Delta_{\text{F}}{}^{\mu\nu}(x-y) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 q \mathrm{e}^{-iq(x-y)} \left[\frac{g^{\mu\nu} - q^{\mu} q^{\nu}/m_{\text{W}}{}^2}{q^2 - m_{\text{W}}{}^2 + i\varepsilon} \right] \quad (10.128\text{ a})$$

伝播関数の第 2 項は保存カレントに掛かれば消えるから，$q^2 \ll m_{\text{W}}{}^2$ として分母の q^2 を無視すれば，

$$\Delta_{\text{F}}{}^{\mu\nu}(x-y) \sim g^{\mu\nu} m_{\text{W}}{}^{-2} \delta^4(x-y) \quad (10.128\text{ b})$$

となる．したがって，実効ラグランジアンは

$$\int \mathcal{L}_{\text{eff}} \mathrm{d}^4 x = -(e^2/m_{\text{W}}{}^2) \int J^{\dagger}{}_{\mu}(x) J^{\mu}(x) \mathrm{d}^4 x \quad (10.127\text{ b})$$

となる．ここで，$e^2/m_{\text{W}}{}^2 \to 4G_{\text{F}}/\sqrt{2}$, $J^{\text{EM}} \to J_{\text{L}}{}^{\text{weak}}$ と置き換えれば，弱い相互作用のラグランジアン (10.125) を再現する．つまりフェルミ相互作用は湯川相互作用の 2 次の効果で，$m_{\text{W}} \to \infty$ とした近似に等しい．フェルミ相互作用は座標が一致したときのみ力が働く“点接触”型の相互作用であり，軌道角運動量の S 波しか寄与しない．フェルミ相互作用はベクトル型であるので，$\text{W}^{\pm}$ はフォトンと同じくスピン 1 のベクトル粒子でなければならない．

以上の議論からからわかるように G_{F} は (質量)$^{-2}$ の次元をもつ．この質量として通常陽子の質量を採用するので，$G_{\text{F}} \simeq 10^{-5}/m_{\text{p}}{}^2$ という非常に小さい値をもつ．これが弱い相互作用の名前の由縁である．しかし，質量値として $m_{\text{W}}(\sim 80\text{ GeV})$ を採用すると結合定数の大きさはだいたい電磁力と同程度となり，これが後の統一理論への足がかりとなった．つまり取り扱う現象のエネルギーが伝達粒子の質量よりはるかに下の低エネルギー領域では，力の強さは見かけ上伝達粒子の質量の自乗に比例して弱くなる．このように考えると，4-フェルミ相互作用は W 粒子交換反応の近似式であるという立場が成立し，その場合弱い相互作用反応はすべて次のラグランジアンで記述できる．

$$-\mathcal{L}_{\text{I}} = (g_{\text{W}}/\sqrt{2}) [\sum_i \overline{\psi}_{i\text{L}} \gamma^{\mu} \tau^{+} \psi_{i\text{L}} W^{+}{}_{\mu} + \text{h.c.}] \quad (10.129)$$

$$\frac{g_{\text{W}}{}^2}{8 m_{\text{W}}{}^2} = \frac{G_{\text{F}}}{\sqrt{2}} \quad (10.130)$$

$$\psi_N=\begin{bmatrix} u \\ d' \end{bmatrix},\quad \psi_e=\begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \end{bmatrix},\quad \psi_\mu=\begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{bmatrix},\quad \psi_\tau=\begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{bmatrix} \tag{10.131}$$

$$d'=d\cos\theta_c+s\sin\theta_c \tag{10.132}$$

$$\psi_L=\frac{1-\gamma^5}{2}\psi \tag{10.133}$$

$g_W/\sqrt{2}$ の $\sqrt{2}$ の因子は，後の便宜のためで深い意味はない．結局すべての弱い相互作用反応は，① クォークモデル，② V-A 相互作用，③ 力の伝達粒子は $W^\pm$，④ カビボ回転という要素を取り入れると非常に簡単できれいな形に整理できることがわかった (図 10.12).

弱い相互作用の普遍 V-A 型が決められたのは 1957 年頃で，パリティの非保存が発見されて 1 年くらいの間である．それまでは，β 崩壊の理論が混沌としていたのが，パリティの非保存発見を契機に急速に整理がついたということで，弱い相互作用の歴史では，1957 年は一つの大きな契機となっている．こ

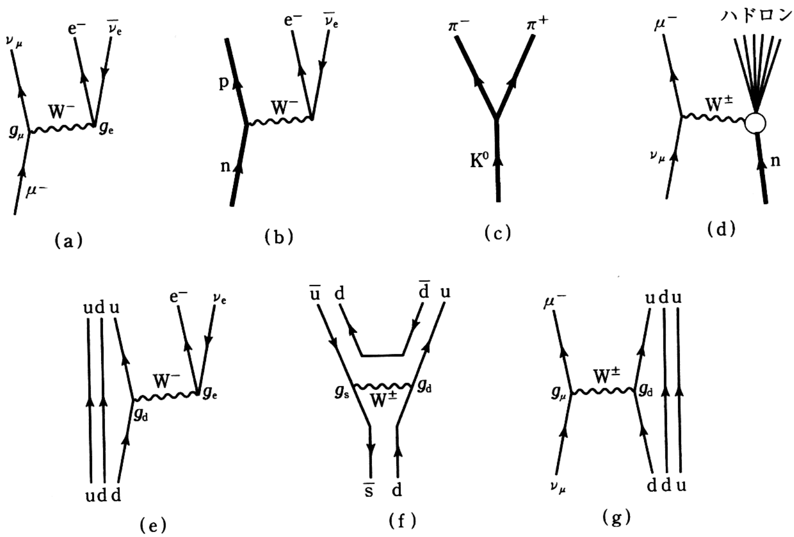


図 10.12 ハドロンの関与する弱い相互作用をクォークモデルで整理して書き直す．すべては (u, d), (u, s), (ν_e, e), (ν_μ, μ) のつくるカレントが $W^\pm$ と結合するという形に統一的に表現できる．
(a) μ 崩壊はこのままで素過程である．
(b) β 崩壊，(c) $K^0\to\pi^-\pi^-$，(d) $\nu_\mu+n\to\mu^-+X$ (ハドロン) をクォークで書き直すとそれぞれ (e), (f), (g) となる．$W^\pm$ と各クォークまたはレプトンとの結合定数を g_d, g_s, g_μ, g_e と書いた．

れによって，弱い相互作用を媒介する粒子（W 粒子とも中間ボソンともいわれる）を発見しようとする大きな動機が生まれ，以後の加速器建設理由には必ず W 粒子発見という目的がつけ加えられるようになった．しかし，質量や結合定数をも含めて W の性質が明らかになるためには，1967年のワインバーグ-サラム理論を待たねばならなかった．この普遍 V-A フェルミ相互作用 (10.125) は，ワインバーグ-サラム理論（QCD と並んで今日では標準理論と呼ばれる）以前の弱い相互作用現象の総括ともいえ，現象論的には非常に強力である．現在でも W 粒子生成もしくはそれ以上のエネルギー現象を論じるのでない限り，通常の崩壊現象はもとよりニュートリノ反応まで含めて，この普遍フェルミ相互作用で十分記述が可能である．この現象論的成功が，後述するように理論的には大いなる欠陥があったにもかかわらず普遍フェルミ相互作用を重要視させる原動力となった．力の普遍性，ベクトル型など，電磁相互作用との類似性や部分的ではあるが電磁相互作用と重なることなどが統一理論への大きな手がかりとなるとともに大きな飛躍台を提供したのである．

10.7.2 フェルミ理論の欠陥

4-フェルミ V-A 相互作用は，1970 年代までに存在した現象をほとんどすべて説明できるので実験データに関する限りは満足すべき理論であった．しかしこれが正しい理論ではないことはただちにわかる．(10.125) を使えば容易に計算できることであるが，ニュートリノ・クォーク散乱 ($\nu \mathrm{d} \to \mathrm{e}^- \mathrm{u}$) の断面積は重心系で，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{G_F{}^2}{4\pi^2}s, \qquad \sigma=\frac{G_F{}^2}{\pi}s \tag{10.134}$$

となる（後述，(12.109)）．この断面積は重心系全エネルギーの自乗 s に比例して増加する．一方ユニタリティから，角運動量 J の部分波による断面積は

$$\sigma \leqq (2J+1)\pi \lambda\!\!\!^{-2}=(2J+1)\pi/p^2=(2J+1)\pi\times 4/s \tag{10.135}$$

を超えることができない．4-フェルミ相互作用は，点接触相互作用であるから S 波のみ寄与する．したがって，

$$s \lesssim 2\pi/G_F \longrightarrow p \lesssim 300\ \mathrm{GeV} \tag{10.136}$$

でのみ 4-フェルミ相互作用は有効であり，それ以上のエネルギーでは破綻する．これを救うためには摂動の高次の項を取り入れる必要があるが，そのとき中間状態に現れる仮想粒子のエネルギーについては足し上げねばならない．$p \to \infty$ ではすべての質量は無視できるから，補正項の最も発散しやすい項は通常

$$G_F \int f(p) \frac{d^4 p}{p^4} \tag{10.137}$$

のような形をしている（たとえば，第 5 章「QED」の (5.137)）．弱相互作用の場合は，フェルミ結合定数が E^{-2} の次元をもつから $f(p) \propto p^2$ となり，悪質な発散が生じる．このような発散は場の量子論の宿命であるが，同じ発散でも質の良い発散と悪い発散の区別のあることが長年の研究でわかってきた．4-フェルミ理論は質の悪い発散の例なのである．質の良い発散とは，有限個の補正量の導入で相殺が可能であり，一定の処方箋に従えば正しい有限な結果を与える（繰り込み可能な理論）．代表例が QED (quantum electro dynamics：量子電磁力学) であり，繰り込みの処方をすれば，電子やミューオンの異常磁気能率 $(g-2)$ の実験データを 10^{-10} の桁まで正しく説明できること，また高エネルギー電子陽電子衝突実験によって，適用可能範囲がエネルギー領域 $\lesssim$ 1TeV 付近までは確認されていることを第 5 章で議論した．この事実は，繰り込み可能な理論は不完全ではあるにしろ真実に近いものであると推察するに十分な根拠となる．正しい理論のモデルとして常に QED が選ばれるのはこの理由による．QED では G_F に相当する結合定数は α で無次元であるので，QED をモデルとするならば，まず弱相互作用の結合定数を無次元化することが必要であろう．そこでフェルミ型を湯川型に直し，$W^\pm$ 中間子を導入して発散の困難を救えないかと試みる．

弱い相互作用の中でも最も簡単な例として，電子とニュートリノの相互作用を考える．粒子 W の場の演算子を $W^\pm{}_\mu$（± はそれぞれ W^+ と W^- の消滅演算子）とする．そうすると電子とニュートリノと W の相互作用ラグランジアンは，QED の $\mathscr{L} = -j^\mu A_\mu$ と同じ形に書けて，

$$\mathscr{L}_W = -(g_W/\sqrt{2})(\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L W^+{}_\mu + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L W^-{}_\mu) \tag{10.138}$$

ただし，$\sqrt{2}$ は便宜のための規格因子である．

結合定数 g_W が無次元量であることは次のようにしてわかる．物理量としてラグランジアンの中の質量項を例にとり，次元を考えると

$$\left[\int \mathscr{L} \mathrm{d}^3 x\right]=\left[\int m_W{}^2 W_\mu W^\mu \mathrm{d}^3 x\right]=\left[\int m \bar{\psi} \psi \mathrm{d}^3 x\right]=[E] \quad (10.139)$$

であるから，$[\psi]=[E]^{3/2}$, $[W_\mu]=[E]$ となり，(10.138) の左右の次元を考慮すれば，g_W は無次元となることがいえる．

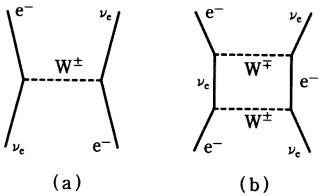


図 10.13 $W^\pm$ を介した $\nu_e e^-$ 散乱
(a) 最低次の寄与，(b) 高次の寄与．

電子とニュートリノの散乱を点接触のフェルミ相互作用による代わりに，W 粒子の交換で実現させることにすると（図 10.13 (a)）．この 2 次の行列要素は，

$$-i\mathscr{M}_{fi}=\bar{u}\left(\frac{-ig_W}{\sqrt{2}}\gamma^\mu\right)\frac{(1-\gamma^5)}{2}\, d\, \frac{-i(g_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu/m_W{}^2)}{q^2-m_W{}^2}\, \bar{e}\left(\frac{-ig_W}{\sqrt{2}}\gamma^\nu\right)\frac{(1-\gamma^5)}{2}\nu \quad (10.140)$$

で与えられる．関与する運動量遷移 q^2 を W の質量の 2 乗 $m_W{}^2$ に対して無視する近似で，(10.140) は既知の 4-フェルミ相互作用となるから，フェルミ結合定数 G_F と湯川型結合定数 g_W とは

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\frac{g_W{}^2}{8m_W{}^2} \quad (10.141)$$

の関係にある．微分断面積

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{CM}=\frac{G_F{}^2 s}{4\pi^2}\left[\frac{m_W{}^2}{m_W{}^2-q^2}\right]^2=\frac{(G_F{}^2/4\pi^2)s}{[1+(s/2m_W{}^2)(1-\cos\theta)]^2} \quad (10.142)$$

を積分すれば

$$\sigma(\nu \mathrm{d} \to \mathrm{eu})=\frac{G_F{}^2 s}{\pi}\frac{1}{1+s/m_W{}^2} \quad (10.143)$$

となる．これは，$s\to\infty$ で $\sigma\sim$const. であるので大いなる改良である．しか

し，S 波の散乱振幅 f_0 を計算してみると

$$f_0=\frac{G_F s}{4\pi}\int d\cos\theta\frac{1}{[1+(s/2m_W^2)(1-\cos\theta)]}$$
$$=\frac{G_F m_W^2}{2\pi}\log\left(1+\frac{s}{m_W^2}\right) \tag{10.144}$$

と対数発散をするので，少なくとも最低次ではやはり発散の困難は救えていない．そこで高次の項はどうかとみるに，W を中間状態に含むような項を考えると（図 10.13 (b)），W はベクトル粒子であるので偏極についても足し上げる必要があり，伝播関数は

$$\sim\frac{\sum_{\lambda=1}^{3}\varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon^\nu(\lambda)^*}{q^2-m_W^2}=\frac{-g^{\mu\nu}+\dfrac{q^\mu q^\nu}{m_W^2}}{q^2-m_W^2} \tag{10.145}$$

となる．この $q^\mu q^\nu$ に比例する項の起源は理解するのが容易である．質量をもつベクトルボソンは 3 個のスピン自由度をもつ．静止系での偏極ベクトルを $\varepsilon^\mu(\lambda)$ ($\lambda=1\sim3$) とすると，

$$\varepsilon^\mu(1)=(0;1,0,0),\quad \varepsilon^\mu(2)=(0;0,1,0),\quad \varepsilon^\mu(3)=(0;0,0,1) \tag{10.146}$$

ととれる．運動方向に z 軸をとり，W が $(\omega;0,0,q)$ なる運動量をもつ系へローレンツ変換をすると，横偏極は変わらないが，縦偏極は

$$\varepsilon^\mu(3)=(q/m_W;0,0,\omega/m_W) \tag{10.147}$$

となるので，(10.145) の分子第 2 項は縦偏極からきていることがわかる．これは実質的に結合定数に E^{-2} の次元を持ち込んだと同じ効果があり発散積分を誘発する．質量が 0 のときは横偏極部分しか存在しないからこうした効果は起こらない．それどころかゲージ不変性の要求は実質的に発散を和らげる効果があることを見た（§5.8「くりこみ」の議論）．すなわちゲージ不変性が成立するときは，悪質な発散積分があっても必ずそれを相殺する項が存在することが保証されている．こうして，ゲージ不変な理論では最終的には対数発散のみとなり，これらの発散量は電荷と質量に繰り込めるというのが QED の教えるところであった．しかし，$W^\pm$ はフォトンと違い，まず第 1 にプラスとマイナスの 2 種類をもつこと，第 2 に W は有限かつ大きい質量をもつという実験事実がある．そこで，問題を 1 つずつ解決するため，W 粒子の質量の有限性はひとまず棚上げし，$W^\pm$ のような電荷をもつ場合にもゲージ理論が成立しうる

のかという疑問をまず考察する必要がある．そのため W がどのような対称性をもちうるか眺めてみよう．

ここで

$$\Psi_L=\begin{bmatrix}\nu_L\\ e_L\end{bmatrix} \tag{10.148}$$

なる列ベクトルを定義し，

$$\tau_\pm=(\tau_x\pm i\tau_y)/2 \tag{10.149}$$

を使うと（ただし，τ_x, τ_y, τ_z はパウリ行列），(10.138) のラグランジアンは，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_W&=-(g_W/\sqrt{2})\,\overline{\Psi}_L\gamma^\mu(\tau_+W^+{}_\mu+\tau_-W^-{}_\mu)\Psi_L \qquad (10.150)\\ &=-(g_W/2)\,\overline{\Psi}_L\gamma^\mu(\tau_xW_{x\mu}+\tau_yW_{y\mu})\Psi_L\\ W^\pm&=(W_x\mp iW_y)/\sqrt{2}\end{aligned}$$

と書ける．この形は核力の有効相互作用

$$\mathcal{L}_N=-ig_N\,\overline{\Psi}_N\gamma^5(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})\Psi_N \tag{10.151}$$

$$\Psi_N=\begin{bmatrix}p\\ n\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\pi}=(\pi_x, \pi_y, \pi_z) \tag{10.152}$$

に似ている．相互作用がベクトル型でなく凝スカラー型であることを除くと

$$\Psi_N\to\Psi_L,\qquad \pi\to W$$

とすればほとんど同一である．ただし，同じ形にするためには中性の W_z ボソンの存在を仮定し，(10.150) の括弧の中に $\tau_zW_{z\mu}$ を付加する必要がある．核力の場合はアイソスピン独立という対称性，すなわち陽子 p と中性子 n の入れ換えで核力は変わらないという性質をもっていた．この入れ換えが，次で述べる一般化したゲージ対称性の形をしている．そこで弱相互作用も $(\nu\leftrightarrow e)$ の入れ換えで変わらないという“弱いアイソスピン独立”を仮定し弱相互作用ラグランジアンを

$$\mathcal{L}_W=-(g_W/2)\,\overline{\Psi}_L\gamma^\mu(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}_\mu)\Psi_L \tag{10.153}$$

の形をしていると考えてみよう．こうした対称性を要求することは第 3 の中性の W_z 粒子の存在の要求をすることでもある．さらに比較のため，同じ ν, e に対して電磁相互作用を書き下ろしてみると

$$\mathcal{L}_{EM}=e(\,\bar{e}\gamma^\mu eA_\mu)=(e/2)\,\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu(1-\tau_z)\Psi \tag{10.154}$$

となる．弱カレントと比較してただちに気のつくことはアイソスピンカレント

$$j_i^\mu \sim \overline{\Psi}\gamma^\mu \tau_i \Psi \tag{10.155}$$

が両方に現れていることである．実際弱カレントのベクトル部分と電磁カレントのアイソスピン部分は結合定数を別にすれば同一であることは，CVC 仮説で実験的に証明されていることをすでに見た．このように弱カレントは電磁カレントに似ているばかりでなく，ある部分を共有しているのである．とすれば弱カレントもゲージ理論に従う相互作用かもしれないし，場合によっては同じカレントの違う側面を見ているだけかもしれないという希望が湧く．この辺までは，1957 年 V-A 型相互作用の形が決まった段階である程度推察はできていた．ここから一歩進めて，グラショウ-ワインバーグ-サラム（以下 GWS とも書く）の理論に到達するには，ゲージ理論に対する深い洞察を必要とする．ゲージ理論と GWS 理論については第 13 章で議論する．

参考文献

1) M. Morita : Beta decay and Muon capture, W.A. Benjamin (1973)
2) T.D. Lee and C.N. Yang : *Phys. Rev.*, **104** (1956) 254
3) C.S. Wu *et al.* : *Phys. Rev.*, **105** (1957) 1413
4) M.T. Burgy *et al.* : *Phys. Rev Lett.*, **1** (1958) 324, *Phys. Rev.*, **120** (1960) 1829
5) PDG ; Reiew of Particle Properties, *Phys. Rev.*, **D54** (1996) 1
6) T. Kinoshita : *Phys. Rev. Lett.*, **2** (1959) 477
7) W. Fetscher *et al.* : *Phys. Lett.*, **B140** (1984) 117
8) H. Frauenfelder *et al.* : *Phys. Rev.*, **106** (1957) 386
9) M. Goldhaber *et al.* : *Phys. Rev.*, **109** (1958) 1015
10) Kawakami *et al.* : *Phys. Lett.*, **B256** (1991) 105
11) M. Bardon *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **14** (1965) 449
12) M. Roos and A. Sirlin : *Nucl. Phys.*, **B29** (1971) 296
13) M.A. Beg and A. Sirlin : *Phys. Rep.*, **88** (1982) 1
14) W. Fetscher, H.J. Gerber and K.F. Johnson : *Phys. Lett.*, **B173** (1986) 102
15) B. Balke *et al.* : *Phys. Rev.*, **D37** (1988) 587
16) S.S. Gershtein and Ya.B. Zeldovich : *Sov. Phys.*, **JETP2** (1956) 596
17) S.L. Adler : *Phys. Rev.*, **140** (1965) 736
W.I. Weisberger : *Phys. Rev.*, **143** (1966) 1302
18) R.P. Sudarshan and R.E. Marshak : *Phys. Rev.*, **114** (1958) 1329
19) R.P. Feynman and M. Gell-Mann : *Phys. Rev.*, **109** (1958) 193

20) Y.K. Lee, L.W. Mo and C.S. Wu : *Phys. Rev. Lett.*, **10** (1963) 253
21) BNL, E734 ; L. Ahrens *et al.* : *Phys. Lett.*, **B202** (1988) 284
22) 例えば, E.D. Commins, Weak Interactions. McGraw-Hill, 1983 をみよ.
23) H. Leutwyler and M. Roos : *Z. Phys.*, **C25** (1984) 91
24) P.T. Eschtruth *et al.* : *Phys. Rev.*, **165** (1968) 1489
E. Bellotti *et al.* : *Nuovo Cimento*, **52A** (1967) 1287
25) N. Cabibbo : *Phys. Rev. Lett.*, **10** (1963) 531
26) Y. Katayama *et al.* : *Prog. Theor. Phys.*, **28** (1962) 675
Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata : *Prog. Theor. Phys.*, **28** (1962) 870
27) H. Braun *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B89** (1975) 210
28) M. Bourquin *et al.* : *Z. Phys.*, **C21** (1983) 27
29) S. Gentile and M. Pohl : Physics of Tau Leptons, Physics Report, **274** (1996) 287
30) R. Brandelik *et al.* : *Phys. Lett.*, **B73** (1978) 109
31) D. Schile : *Fortschr. Phys.*, **42** (1994) 429
32) F.J. Gilman : *Phys. Rev.*, **D35** (1987) 3541
33) G. Danby *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **9** (1962) 36
34) 例えば, T.P. Cheng and L.F. Li : Gauge Theory of elementary particles, Oxford (1984) pp. 420 を参照
35) SK ; Y. Fukuda *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 1562
36) T.D. Lee : *Phys. Rev.*, **75** (1949) 905

11

中性K中間子とCPの破れ

物理学の歴史は，一見明らかでない対称性を解明し，その本質を追究することによって新原理に到達する過程の繰り返しである．これに反し，当然成立すると信じられていた対称性が破れていることが発見され，その衝撃が新しい発展を促す例もある．パリティの破れはその好例である．前章では，パリティの破れが例外的な異常現象ではなく，弱い相互作用の基本的枠組みの中に組み込まれていることを知った．その意味で，パリティの破れは自然の本質的な性質の一つであるといえる．CPもまた本来保存していると信じられていたものの一つであるが，その本質は依然として理解されていない．しかし，宇宙論によればCPの破れひいてはTの破れがないと宇宙にバリオンが存在できない．このわれわれの住む宇宙が物質宇宙であること，CPの破れなしには存在できないことを考えると，単なる例外的異常現象ではなくやはり深い意味があると考えざるをえない．

CPの破れ現象を標準理論の枠組みの中に組み込むことは可能であるが，標準理論を超えた現象である可能性もある．その意味で例外的な，これ自身独立したトピックとみなしてもよい．CP非保存の議論は本書のどこにおいてもそれほど違和感なしに学習できるので，本書の流れからはいったんスキップして興味の湧いた時点で戻ってきてもかまわない．しかし，パリティの例を引くまでもなく，小さな異常を追求することにより新展望の開ける可能性はあるわけで，CP現象をしっかりと把握しておくことの重要性はいうまでもない．

CPの破れは，1964年に中性K中間子現象において発見された．そして，現在までのところそれ以外の場所では観察されていない．近い将来，B中間子現象で観測される可能性はあるが，その議論は別のところで行うことにして，

ここでは K 中間子における CP の破れの現象論を解説する.

11.1　2　体　混　合

11.1.1　ストレンジネス固有状態と CP 固有状態

中性 K 中間子には 2 種類ある. 強い相互作用ではストレンジネスは保存されるので, この二つはストレンジネスで区別される. その証拠はストレンジネス S のわかっているハイペロンと組み合わせて生成される反応または散乱をみればよい.

$$\begin{array}{cccccc} & \pi^- & +\mathrm{p} \rightarrow & \mathrm{K}^0 & + & \Lambda \\ S & 0 & 0 & +1 & & -1 \end{array} \tag{11.1 a}$$

$$\begin{array}{cccccc} & \pi^- & +\mathrm{p} \rightarrow & \overline{\mathrm{K}}^0 & +\mathrm{K}^0 & +\mathrm{n} \\ S & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \end{array} \tag{11.1 b}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{K}^0 & +\mathrm{p} \rightarrow & \mathrm{K}^+ & +\mathrm{n} \\ S & +1 & 0 & +1 & 0 \end{array} \tag{11.2 a}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \overline{\mathrm{K}}^0 & +\mathrm{n} \rightarrow & \mathrm{K}^- & +\mathrm{p} \\ S & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \tag{11.2 b}$$

$$\begin{array}{cccccc} & \overline{\mathrm{K}}^0 & +\mathrm{p} \rightarrow & \pi^+ & + & \Lambda \\ S & -1 & 0 & 0 & & -1 \end{array} \tag{11.2 c}$$

$S=+1$ をもつ K^0 は, K^+ と組み $(\mathrm{K}^+, \mathrm{K}^0)$, $S=-1$ をもつ $\overline{\mathrm{K}}^0$ は, K^- と組んで $(\overline{\mathrm{K}}^0, -\mathrm{K}^-)$ のようにそれぞれアイソスピン 1/2 の多重項をつくり, 一方は他方の反粒子となっている.

ところで, K^0 と $\overline{\mathrm{K}}^0$ は, 同じ崩壊モード ($2\pi, 3\pi, \pi^{\mp}l^{\pm}\nu$ など) をもつので, 崩壊モードでは区別がつけられない. これは, 崩壊を引き起こす弱い相互作用では, ストレンジネスは良い量子数ではないことを反映している. 一方, 弱い相互作用では, パリティおよび荷電共役変換もそれぞれ独立には保存しないことが 1957 年に発見されたが, 両者を組み合わせた CP 変換は保存するとしばらくは考えられていた. CP の破れは後ほど議論することとし, まずは, CP 変換は弱い相互作用で保存するとして話を進めよう.

波動関数には位相の不定性があるので

$$|K^0\rangle \equiv CP|\bar{K}^0\rangle, \qquad |\bar{K}^0\rangle \equiv CP|K^0\rangle \tag{11.3}$$

のように定義できる．これから K_1, K_2 を

$$|K_1\rangle = (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)/\sqrt{2} \tag{11.4 a}$$

$$|K_2\rangle = (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)/\sqrt{2} \tag{11.4 b}$$

で定義すれば，$CP|K_1\rangle = |K_1\rangle$, $CP|K_2\rangle = -|K_2\rangle$ となり，CP の固有状態である．K_1, K_2 は異なる CP の値をもつので違う崩壊モードをもつ．K 中間子がエネルギー的に崩壊可能な $2\pi, 3\pi$ 系の CP は，それぞれ $+$ と $-$ であり，$K_1 \to 2\pi$, $K_2 \to 3\pi$ と崩壊モードが分かれることを示そう．

（1） $2\pi: P\pi = -\pi$ である．$\pi^+\pi^-$ 系では，C によって，$\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$ となるので，ボーズ統計性から C 演算は P 演算と同等であり，$CP(\pi^+\pi^-) = (-1)^{2l} = +1$ である．また，$C\pi^0 = \pi^0$ であり，やはりボーズ統計から $\pi^0\pi^0$ 系の波動関数の軌道角運動量 l は偶でなければならず，$CP(\pi^0\pi^0)$ は正である．

（2） $3\pi: \pi^+\pi^-\pi^0$ 系では，$\pi^+\pi^-$ 系の角運動量を l とし，$\pi^+\pi^-$ 重心系と π^0 との相対軌道角運動量を L とすれば，$CP(\pi^+\pi^-\pi^0) = (-1)^{2l+L+1}$ となる．角運動量障壁により，$l = L = 0$ の成分が優勢であるから，CP は負である．$3\pi^0$ については，(1) と同じ考察から l が偶数となる．全角運動量は 0 であることから $L = l$ であるので，$CP(3\pi^0)$ は負となる．

以上の考察から，K_1 は 2π に，K_2 は 3π に崩壊できることがわかる．Q 値 $(m_K - \sum m_\pi)$ は $K_1 \to 2\pi$ の方がはるかに大きいから，崩壊率 Γ は，$\Gamma_1 \gg \Gamma_2$ となる．すなわち K_1 の寿命は K_2 に比べてずっと短いので，K_1, K_2 の代わりに K_S, K_L と書くこともある．

11.1.2 ストレンジネス振動

K^0 と $\bar{K}^0$ はともに K_1 と K_2 を半分ずつ含むので，共通の崩壊モード $2\pi, 3\pi$ をもつ．したがって，$K^0 \leftrightarrow (2\pi, 3\pi) \leftrightarrow \bar{K}^0$ の遷移 (K^0 と $\bar{K}^0$ の混合という) が可能であり，$\langle K^0|H|\bar{K}^0\rangle \neq 0$．ここで，$H$ は，K の質量を生む強い相互作用 H_0 と崩壊を引き起こす H_W をともに含む．混合があるということは真空中で K^0 が $\bar{K}^0$ に変わりうることを示す．K の静止系で，

$$\psi = \alpha(t)|K^0\rangle + \beta(t)|\bar{K}^0\rangle \tag{11.5}$$

の時間依存性を決めるシュレーディンガー方程式は，質量行列を使って次のように表される．

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle \mathrm{K}^0|H|\mathrm{K}^0\rangle\langle \mathrm{K}^0|H|\overline{\mathrm{K}}{}^0\rangle\\ \langle \overline{\mathrm{K}}{}^0|H|\mathrm{K}^0\rangle\langle \overline{\mathrm{K}}{}^0|H|\overline{\mathrm{K}}{}^0\rangle\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\widetilde{M}_{11}, \widetilde{M}_{12}\\ \widetilde{M}_{21}, \widetilde{M}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \tag{11.6}$$

$\mathrm{K}^0, \overline{\mathrm{K}}{}^0$ の 2 体系に話を閉じるときは，K 粒子のほかの状態への遷移（崩壊）は，K 粒子がこの系から消滅したとみなされ，K 粒子の確率振幅は時間とともに減少しなければならない．

$$|\mathrm{K}(t)\rangle\sim \mathrm{e}^{-i\widetilde{M}t}|\mathrm{K}(0)\rangle=\mathrm{e}^{-im_{\mathrm{K}}t-(\Gamma/2)t}|\mathrm{K}(0)\rangle$$

すなわち $\widetilde{M}$ は複素数固有値をもちエルミートではない．弱い相互作用の 2 次までをとり，時間 t が反応時間に比べ十分長いとき，質量行列 $\widetilde{M}$ は二つのエルミート行列 M_{ij}, Γ_{ij} を使って

$$\widetilde{M}_{ij}=M_{ij}-i\Gamma_{ij}/2 \tag{11.7 a}$$

$$M_{ij}=M_i\delta_{ij}+\langle i|H_{\mathrm{W}}|j\rangle+\sum_{n\neq \mathrm{K}^0, \overline{\mathrm{K}}{}^0} P\frac{\langle i|H_{\mathrm{W}}|n\rangle\langle n|H_{\mathrm{W}}|j\rangle}{M_i-E_n} \tag{11.7 b}$$

$$\Gamma_{ij}=2\pi\sum_{n\neq \mathrm{K}^0, \overline{\mathrm{K}}{}^0}\delta(M_i-E_n)\langle i|H_{\mathrm{W}}|n\rangle\langle n|H_{\mathrm{W}}|j\rangle \tag{11.7 c}$$

と表される[1]（付録 G）．Σ の中の P は主値を意味する．

(11.6) を対角化すれば，ψ は $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$ を基底とする表示となる．

$$\psi=\alpha'(t)|\mathrm{K}_1\rangle+\beta'(t)|\mathrm{K}_2\rangle=\alpha(t)|\mathrm{K}^0\rangle+\beta(t)|\overline{\mathrm{K}}{}^0\rangle \tag{11.8 a}$$

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_{\mathrm{S}}, & 0\\ 0, & \lambda_{\mathrm{L}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{bmatrix} \tag{11.8 b}$$

$$\lambda_{\mathrm{S}}=m_{\mathrm{S}}-\frac{i}{2}\Gamma_{\mathrm{S}}, \qquad \lambda_{\mathrm{L}}=m_{\mathrm{L}}-\frac{i}{2}\Gamma_{\mathrm{L}} \tag{11.8 c}$$

ここで，$\lambda_{\mathrm{L,S}}$ は一般に複素数で，$m_{\mathrm{L,S}}$, $\Gamma_{\mathrm{L,S}}$ は実数である．後の便宜のために質量や崩壊率については指標 2, 1 の代わりに長寿命，短寿命の L, S を使うことにする．固有値 $\lambda_{\mathrm{S,L}}$ ともとの行列要素との間の関係は

$$\lambda_{\mathrm{S,L}}=\frac{\widetilde{M}_{11}+\widetilde{M}_{22}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\widetilde{M}_{11}-\widetilde{M}_{22}}{2}\right)^2+\widetilde{M}_{12}\widetilde{M}_{21}}$$

$$\equiv M\pm\Delta/2 \tag{11.9 a}$$

$$M \equiv (\widetilde{M}_{11}+\widetilde{M}_{22})/2=(\lambda_S+\lambda_L)/2 \tag{11.9 b}$$

$$\Delta \equiv \lambda_S-\lambda_L \tag{11.9 c}$$

$$\lambda_S\lambda_L=\widetilde{M}_{11}\widetilde{M}_{22}-\widetilde{M}_{12}\widetilde{M}_{21} \tag{11.9 d}$$

で与えられる．ここで，後の便宜のため M と Δ を定義した．

CPT保存であれば，

$$M=\widetilde{M}_{11}=\widetilde{M}_{22} \tag{11.10 a}$$

$$\Delta=2\sqrt{\widetilde{M}_{12}\widetilde{M}_{21}} \tag{11.10 b}$$

さらに，CP保存であれば

$$\widetilde{M}_{12}=\widetilde{M}_{21}=\Delta/2 \tag{11.11}$$

(11.4) はCPT，CP保存がともに成り立つときの K^0 表示と K_1 表示の変換行列になっている．

演習 11.1 (11.9) を証明せよ．

いま，$t=0$ に純粋な $|K^0\rangle$ がつくられたとしよう．純粋な K^0 ビームは，例えば π^-p 反応において，K^0 をつくる反応 ((11.1 a)，しきい値 0.91 GeV)) のエネルギーしきい値が，$\bar{K}^0$ をつくる反応 ((11.1 b)，しきい値 1.5 GeV) のしきい値より低いことを利用して，π ビームエネルギーを 0.91 GeV と 1.5 GeV の間に設定することによりつくることができる．K_1, K_2 が質量行列の固有状態であるので，

$$\begin{aligned}|K^0(t)\rangle &=(|K_2(t)\rangle+|K_1(t)\rangle)/\sqrt{2}\\ &=\{|K_2(0)\rangle e^{(-im_L-\Gamma_L/2)t}+|K_1(0)\rangle e^{(-im_S-\Gamma_S/2)t}\}/\sqrt{2}\\ &=[|K^0\rangle\{e^{(-im_L-\Gamma_L/2)t}+e^{(-im_S-\Gamma_S/2)t}\}\\ &\quad -|\bar{K}^0\rangle\{e^{(-im_L\equiv\Gamma_L/2)t}-e^{(-im_S-\Gamma_S/2)t}\}]/2\end{aligned} \tag{11.12}$$

によって，時間が経つと $\bar{K}^0$ の成分が現れる．時刻 t で，$\bar{K}^0$ を検出する確率は，

$$\begin{aligned}P(K^0\to\bar{K}^0)&=|\langle\bar{K}^0|K^0(t)\rangle|^2\\ &=\frac{1}{4}[e^{-\Gamma_L t}+e^{-\Gamma_S t}-2e^{-\bar{\Gamma}t}\cos\Delta mt]\end{aligned} \tag{11.13 a}$$

$$\bar{\Gamma}\equiv(\Gamma_L+\Gamma_S)/2\sim\Gamma_S/2, \qquad \Delta m=|m_S-m_L| \tag{11.13 b}$$

で与えられる．また，K^0 を検出する確率は，上式第 3 項の干渉項の前の符号

を正として得られる. (11.13) は, K^0 と $\bar{K}^0$ の成分が時間とともに振動することを示している. $\Delta m \gg \Gamma_S$ の場合は, 振動が激しすぎて, K^0 と $\bar{K}^0$ を別々に検出するのは困難であるが, $\Delta m \simeq \Gamma_S$ ならば, 振動の様子が実際にみられるであろう (図 11.1). Δm は, K_1 の再生 (後述) 方法により精密に測定されていて

$$\frac{\Delta m_K}{\Gamma_S} \equiv \frac{m_S - m_L}{\Gamma_S} = -0.477 \pm 0.002 \tag{11.14 a}$$

$$\Delta m = |\Delta m_K| = 3.522 \pm 0.016 \times 10^{-6}\ \text{eV} \tag{11.14 b}$$

であるが, 原理的にはこのストレンジネス振動の方法でも決められるものである.

Δm は $2\pi, 3\pi$ 中間状態を通して混合する効果 (図 11.2), つまり質量行列の非対角要素が 0 でないことから生じる効果であり, $\Delta S=1$ の弱い相互作用の 2 次の寄与である. ゆえに Δm は結合定数の自乗 $G_F{}^2 \sin^2\theta_C$ に比例するはずであり, 次元解析から

$$\Delta m \sim G_F{}^2 \sin^2\theta_C m_K{}^5 \sim 10^{-4}\ \text{eV} \tag{11.15}$$

となって, おおよそのオーダーは合う.

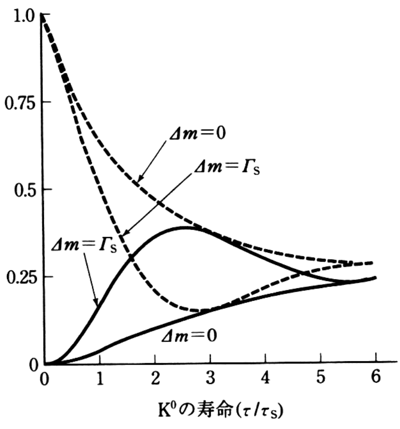


図 11.1 ストレンジネス振動
当初 K^0 であったものが K^0 であり続ける確率 (---) と最初は存在しなかった $\bar{K}^0$ が現れる確率 (——). K_1-K_2 の質量差 Δm が, $\Delta m=0$ の場合と $\Delta m=\Gamma_S$ の場合について曲線を描く (実際に観測された値は, $\Delta m \simeq \Gamma_S/2$ であるが, 図を見やすくするため $\Delta m=\Gamma_S$ のケースを想定して描いた). 実際には図 11.6 のようになる.

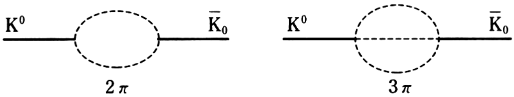


図 11. 2

$K_0, \overline{K}_0$ はともに K_1, K_2 を含み，$K_1 \to 2\pi$，$K_2 \to 3\pi$ なので，$K^0, \overline{K}^0$ は 2π または 3π の中間状態を通して，互いに変換（混合）が可能である．この遷移が $K_1 - K_2$ の質量差を生む．

ストレンジネス振動を確認するには，K^0 が生成されてからの K^0 または $\overline{K}^0$ の存在を生成時刻からの時間の関数として描く必要がある．ストレンジネスは強い相互作用での固有モードであることに留意すると，ストレンジネスの確認は崩壊ではなく衝突反応で観測しなければならない．ただしどのような衝突反応が起きたかを確認するには続いて起こる崩壊を使う．例えば水素泡箱の中で，$t=0$ で K^0 が $\pi^- p \to K^0\Lambda$ 反応で生成されるという事実は，続いて起こる $\Lambda \to \pi^- + p$（$\sim 2.69\times10^{-10}$ くらいの寿命）を認識して確認できる．t 秒後の $\overline{K}^0$ の存在確率は例えば $\overline{K}^0 p \to \pi^+\Lambda$ 反応を観測し，事象発生率を反応点からの距離の関数として測定すればよい．K^0 の運動量，方向は計算できるから，飛距離と時間（固有時間）との対応が付けられる．

11. 1. 3 K_1 の再生 (regeneration)

最初に K^0 または $\overline{K}^0$ であっても十分長い時間（$t \gg \tau_S = 1/\Gamma_S$: τ_S は，K_S の平均崩壊寿命）の後は，K_1 成分は全部崩壊してしまい，K_2 成分のみ残る．このことは，K^0 発生点から十分離れた地点で崩壊モードを観察すれば，CP が負の 3π はたくさん見つかるのに反し，CP が正の 2π モードは全く現れないことにより確認できる．この純粋な K_2 ビームに物質を通過させることを考えよう．低エネルギーでは $S=1$ をもつ K^0 は，弾性散乱かせいぜい荷電交換反応（$K^0 p \to K^+ n$）しか起こさないが，$S=-1$ をもつ $\overline{K}^0$ は，そのほかにハイペロンをつくる反応（$\overline{K}^0 p \to \pi^+\Lambda, \pi^+\Sigma^0, \pi^0\Sigma^+$ など）を起こすので，K^0 に比べて大きな吸収率をもつ．したがって，物質を通過した後，

$$|K^0\rangle \longrightarrow f|K^0\rangle, \qquad |\overline{K}^0\rangle \longrightarrow \overline{f}|\overline{K}^0\rangle$$

とすれば，$f \neq \overline{f}$ である．したがって物質通過後は，

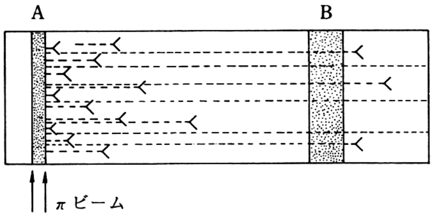


図 11.3　K_1 の再生

π ビームを物質に当てることにより $K_0, \bar{K}_0$ がつくられるが，崩壊は K_1, K_2 モードで起きる．短寿命の K_1 は 2π モードなどを通してすぐに崩壊してしまい，十分時間が経過した後は K_2 のみとなる．K_2 を物質中を通過させると K_1 が再生する．K_1 の出現は 2π 崩壊モードで確認する．

$$|K_2\rangle=(|K^0\rangle-|\bar{K}^0\rangle)/\sqrt{2}\longrightarrow(f|K^0\rangle-\bar{f}|\bar{K}^0\rangle)/\sqrt{2}$$
$$=\frac{1}{2}(f+\bar{f})|K_2\rangle+\frac{1}{2}(f-\bar{f})|K_1\rangle \tag{11.16}$$

となり，最初は存在しなかった K_1 成分が現れる（図 11.3）．この現象を K_1 の再生 (regeneration) という．再生現象は，K^0 と $\bar{K}^0$ の反応率が違うことにより生じる現象であり，反応の種類を問わない．しかし，反応する相手のサイズにより，原子核内の個々の核子と反応する非弾性散乱，原子核と弾性的に反応する回折散乱，多数の原子と可干渉的に散乱するコヒーレント (coherent) 散乱とに分けることができ，それぞれ特徴的な散乱角をもつ．このうちコヒーレント散乱は，CP 非保存の種々の性質を決める上で欠かせない手段であるので少し詳細に述べよう．K_1 と K_2 は違う質量をもつので，親の K_2 のもつ運動量 p_2 と再生された K_1 の運動量 p_1 の関係は，

$$p_1{}^2+m_1{}^2=p_2{}^2+m_2{}^2 \tag{11.17 a}$$

$$\therefore\quad \Delta p\equiv p_1-p_2=\frac{m_1+m_2}{p_1+p_2}(m_2-m_1)=\frac{m}{p}\Delta m \tag{11.17 b}$$

$$m=(m_1+m_2)/2,\qquad p=(p_1+p_2)/2$$

ハイゼンベルグの不確定性原理により，$d\lesssim 1/\Delta p=p/(m\Delta m)$ の範囲にある散乱中心からの散乱は互いに干渉が可能である．$p\sim 10$ GeV とし，$m\simeq m_K\sim 0.5$ GeV, $\Delta m\sim 3.5\times 10^{-6}$ eV を代入すると，$d\sim 100$ cm となり，可干渉な最大散乱角 θ は，

$$d(1-\cos\theta)\lesssim\lambda\sim 1/p \tag{11.18 a}$$

$$\theta^2 \sim 2\Delta p/p \sim 10^{-17} \qquad (11.18\,\text{b})$$

このときの運動量遷移 p_T は $\lesssim 100$ eV 程度である．回折散乱の場合の $p_T \lesssim 10$ MeV，非弾性散乱の $p_T \gtrsim 100$ MeV に比べて非常に小さく，ほぼ完全な前方散乱であることがわかる（図 11.4[2)]）．

再生用の標的物質の厚さ L を通過した後の状態を

$$|\psi\rangle = |K_2\rangle + \rho(L)|K_1\rangle \qquad (11.19)$$

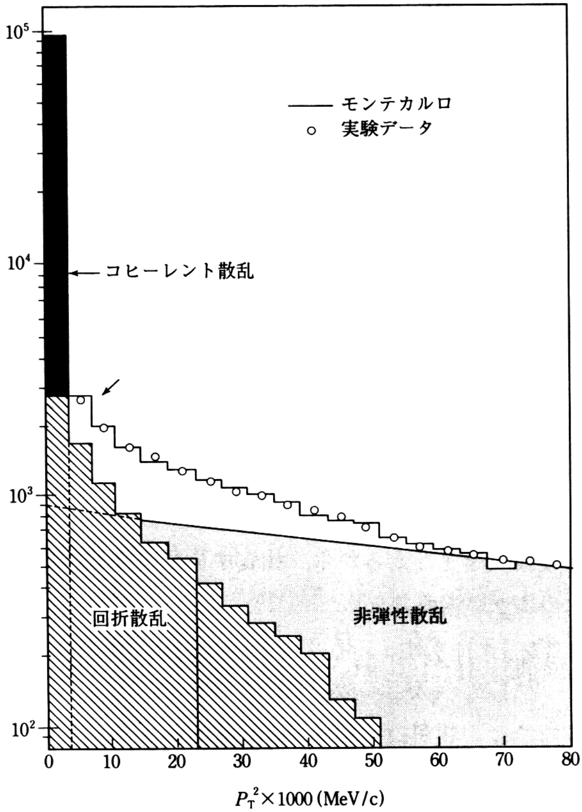


図 11.4 K_S 再生の 3 通りのモード[2)]

$K_S \to \pi^+\pi^-$ より $P_K = P_{\pi+} + P_{\pi-}$ をつくり，ビーム軸に対して $p_T{}^2$ の関数として再生した K_S をプロットする．非弾性散乱（灰色）の $p_T{}^2$ が最も大きく，回折散乱（斜線）が中程度であるのに比べ，コヒーレント散乱（黒影）はほとんど $p_T{}^2 \simeq 0$ の前方に集中する．ヒストグラムはモンテカルロ，◦は実験データを示す．実験では 4000 (MeV/c)^2 に切断を入れてコヒーレント事象を選ぶ．

で表すと，$\rho(L)$ は次の式で与えられる．

$$\rho(L)=\frac{i\pi N}{p}(f(0)-\bar{f}(0))\Lambda_S\frac{1-\exp[\{i(\Delta m/\Gamma_S)-1/2\}L/\Lambda_S]}{1/2-i(\Delta m/\Gamma_S)} \tag{11.20}$$

N：単位体積あたりの散乱中心の数密度

$p=m\beta\gamma$：K 粒子の運動量

$f(0)$，$\bar{f}(0)$：前方散乱振幅

$\Lambda_S=\beta\gamma/\Gamma_S$：$K_S$ の平均崩壊飛距離

$\beta\gamma$：ローレンツ因子

Γ_S：K_S の全崩壊率

$\Delta m=m_L-m_S$：K_L-K_S の質量差

証明　入射波と，コヒーレント散乱波をすべての可干渉な散乱中心について和をとったものとを合成した波は，光学理論でよく知られているように屈折率 n

$$n^2=1+\frac{4\pi Nf(0)}{p^2},\qquad n^2-1\ll 1 \tag{11.21}$$

を導入することによって，物質中では波数 np の波動として表される[3]．この波動の固有質量 M は，

$$p^2+m^2=(np)^2+M^2$$

$$M=\sqrt{m^2-(n^2-1)p^2}\simeq m-\frac{(n^2-1)p^2}{2m}$$

$$=m-\frac{2\pi Nf(0)}{m} \tag{11.22}$$

K^0 と $\bar{K}^0$ では違う屈折率を与えるから，物質中では (11.6) のシュレーディンガー方程式が次のように変更される．

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{M}_{11}, & \widetilde{M}_{12}\\ \widetilde{M}_{21}, & \widetilde{M}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}-\frac{2\pi N}{m}\begin{bmatrix}f, & 0\\ 0, & \bar{f}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \tag{11.23}$$

この解を求めるために，質量行列を λ_S, λ_L で書き直してみよう．CPT, CP 保存であれば (11.10)，(11.11) が成立するから

$$\begin{bmatrix}\widetilde{M}_{11}, & \widetilde{M}_{12}\\ \widetilde{M}_{21}, & \widetilde{M}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M, & \Delta/2\\ \Delta/2, & M\end{bmatrix} \tag{11.24 a}$$

となる．(11.23) 式を (11.24 a) にならって書き直すと

$$\begin{bmatrix} M+\delta\Delta, & \Delta/2 \\ \Delta/2, & M-\delta\Delta \end{bmatrix} \tag{11.24 b}$$

$$M=\frac{\lambda_S+\lambda_L}{2}-\frac{\pi N}{m}(f+\bar{f}),\quad \delta\Delta=-\frac{\pi N}{m}(f-\bar{f}),\quad \Delta=\lambda_S-\lambda_L$$

となる．物質がないときの解は K_1, K_2 であるから，δ を小さい量として $O(\delta)$ の計算をすると容易にわかるように，これは，

$$\begin{aligned} |K_{1M}\rangle &= |K_1\rangle+\delta|K_2\rangle \\ |K_{2M}\rangle &= |K_2\rangle-\delta|K_1\rangle \end{aligned} \tag{11.25}$$

という解をもち，質量の固有値は次の式で与えられる．

$$\lambda_{1m,2m}=\lambda_{S,L}-\frac{\pi N}{m}(f+\bar{f}) \tag{11.26}$$

演習 11.2 $\lambda_{S,L}$ を $\delta=0$ の (11.23) の解とするとき，(11.25) が，$O(\delta)$ の近似で (11.23) の解となっていることを示せ．

物質に入射する前は純粋の K_2 であったとすると，

$$|K_2\rangle=|K_{2M}\rangle+\delta|K_1\rangle\simeq|K_{2M}\rangle+\delta|K_{1M}\rangle \tag{11.27}$$

であるので，物質内での時間変化は，

$$\begin{aligned} |K_2(t)\rangle &= |K_{2M}\rangle e^{-i\lambda_{2m}t}+\delta|K_{1M}\rangle e^{-i\lambda_{1m}t} \\ &\simeq \{|K_2\rangle-\delta|K_1\rangle\}e^{-i\lambda_{2m}t}+\delta|K_1\rangle e^{-i\lambda_{1m}t} \\ &= e^{-i\lambda_{2m}t}[|K_2\rangle+(e^{-i\Delta_m t}-1)\delta|K_1\rangle] \end{aligned} \tag{11.28}$$

ただし，$\Delta_m=\lambda_{1m}-\lambda_{2m}=\lambda_S-\lambda_L=\Delta$ である．厚さ L を通過するには，$t=L/\beta\gamma$ だけかかるから，(11.19) と比較して，

$$\begin{aligned} \rho(L) &= (e^{-i\Delta L/\beta\gamma}-1)\delta=-\frac{\pi N}{m}\frac{(f-\bar{f})}{\Delta}(e^{-i\Delta L/\beta\gamma}-1) \\ &= \frac{i\pi N}{p}(f-\bar{f})\Lambda_S\frac{1-\exp[\{i(\Delta m/\Gamma_S)-1/2\}L/\Lambda_S]}{1/2-i(\Delta m/\Gamma_S)} \end{aligned} \tag{11.29}$$

ただし，$\Gamma_S \gg \Gamma_L$ として Γ_L は無視した．　(証明終)

11.2 CP 保存則の破れ

11.2.1 フィッチ-クローニン (Fitch-Cronin) の実験

CP 保存則が破れていることは，パリティの破れの発見後 7 年して 1964 年

に発見された．長寿命の K_2 は CP が負の状態であるので，3π もしくは準レプトン崩壊の $\pi^{\mp}l^{\pm}\nu$ などには壊れても，2π に壊れることはできないと信じられていた．長寿命の中性 K 中間子がわずかではあるが，2π に崩壊することを最初に示したのは，フィッチ-クローニンらである[4]．彼らの実験装置を図 11.5 に示す．

実験は BNL（ブルックヘブン国立研究所）の 30 GeV の AGS (Alternating Gradient Synchrotron) 陽子シンクロトロンを使って行われた．1 次陽子ビームをベリリウム標的に当て，K を含む 2 次粒子を 30° 方向の適当な穴（コリメータ）を通して中性ビームを取り出す（平均運動量約 1100 MeV)．荷電粒子は磁石で曲げて実験室には来られないようにする．崩壊領域には，プラスチ

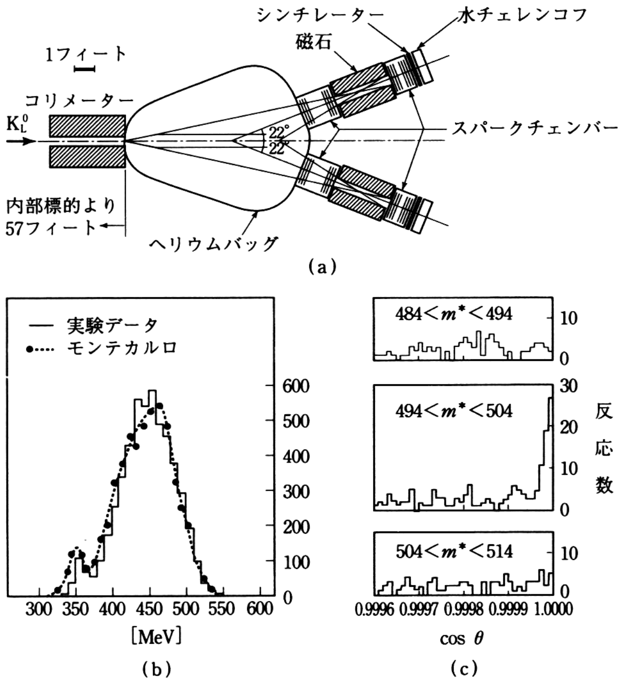


図 11.5　CP の破れを発見した実験[4]

(a)　装置：左方から K_L のビームが入ってきてヘリウムの袋の中で 2π に崩壊し，各々の π の運動量がシンチレーションカウンター，放電箱，磁石よりなるカウンターテレスコープで測定される．ヘリウムバッグ中央にある物質は K_S を再生して，$K\to 2\pi$ を較正するためのもの．

(b)　再構築された K の質量分布．

(c)　$m^*\simeq m_K$ のデータだけ 0° 方向にピークが存在する．すなわち $K_L\to 2\pi$ の存在の証拠．

ックの袋にヘリウムガスを入れて余分な相互作用を取り除く*1)．崩壊生成物の π^+ と π^- の崩壊点（ヴァーテックス，標的から約 $20\Lambda_S$ の距離）と運動量を測定するために，スパークチェンバー（放電箱）と磁石を組み合わせたスペクトロメターを2組置く．さらに装置を較正するときは，崩壊領域には K_1 再生用のタングステンを28 cmおきに総計43 gほど置いた．コヒーレントに再生された K_1 はもとの K_2 と同じ運動量をもつので，$K_1\to\pi^+\pi^-$ は観測したい $K_2\to\pi^+\pi^-$ との比較較正に最適である．2π の運動量をそれぞれ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とすれば，観測粒子を π と仮定して，2π の有効質量 μ

$$\mu^2=(E_1+E_2)^2-(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)^2\approx 2m_\pi{}^2+2p_1p_2(1-\cos\theta) \qquad (11.30)$$

が計算できる．これが m_K に一致することにより，$K\to 2\pi$ 反応の同定ができる（図11.5 (b)）．2個の π より再構成されたKの運動量，$\boldsymbol{p}_K=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ が，ビーム方向に一致することを要求して，コヒーレント散乱以外のバックグラウンドを除去する．図11.5 (c) はこの有りさまを示したもので，有効質量が m_K に一致し，かつ再構築されたK運動量がビーム方向と一致 ($\cos\theta=1$) するところにバックグラウンドの上に明らかにシグナルが見える．データからは，

$$\mathrm{BR}(K_2\to\pi^+\pi^-)\equiv\frac{\Gamma(K_2\to\pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_2\to \mathrm{all})}=(2.0\pm0.4)\times10^{-3} \qquad (11.31)$$

という測定値が得られた．また，1967年には，$K_2\to\pi^0\pi^0$ の崩壊モードも確認された[5]．

11.2.2　*CP* パラメター

a．混合パラメター

2π に崩壊するという事実は，長寿命のKが純粋な K_2 ではなく K_1 成分が混じっていることを示すもので，以下 K_2 と区別するため K_L と表記する．同様に K_1 の代わりに K_S と書くことにする．

$$|K_S\rangle=(|K_1\rangle+\varepsilon_S|K_2\rangle)/\sqrt{(1+|\varepsilon_S|^2)} \qquad (11.32\,\mathrm{a})$$

$$|K_L\rangle=(|K_2\rangle+\varepsilon_L|K_1\rangle)/\sqrt{(1+|\varepsilon_L|^2)} \qquad (11.32\,\mathrm{b})$$

と書くと，$\varepsilon_L, \varepsilon_S$ は *CP* の破れを表す混合パラメターである．一般的には $\varepsilon_L\neq$

*1) 本来は真空にするのが理想的である．また，放電箱の代わりに，今日ならば物質量が少なく，はるかに応答の速い比例計数箱ないしはドリフトチェンバーを使うであろう．

ε_S である．

$$\varepsilon_S = \varepsilon + \delta, \qquad \varepsilon_L = \varepsilon - \delta \tag{11.33}$$

と書き，K_S, K_L の質量行列固有値を，

$$\lambda_S = m_S - i\Gamma_S/2, \qquad \lambda_L = m_L - i\Gamma_L/2 \tag{11.34}$$

とする．(11.32) によって，K_S, K_L は直交状態ではなく，わずかながら重なりがあることがわかる．

$$\langle K_S | K_L \rangle = 2\mathrm{Re}\varepsilon - i2\mathrm{Im}\delta \tag{11.35}$$

質量行列は，K_S, K_L 表示で固有値 λ_S, λ_L をもつ対角行列である．ε, δ は小さい量であるから1次近似をとると，$K^0, \bar{K}^0$ 表示では，

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M}_{11}, & \widetilde{M}_{12} \\ \widetilde{M}_{21}, & \widetilde{M}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M + \delta\Delta, & \Delta/2 + \varepsilon\Delta \\ \Delta/2 - \varepsilon\Delta, & M - \delta\Delta \end{bmatrix} \tag{11.36}$$

$$M = (\lambda_L + \lambda_S)/2, \qquad \Delta = \lambda_S - \lambda_L$$

$$\varepsilon = \frac{\widetilde{M}_{12} - \widetilde{M}_{21}}{2\Delta} = \frac{-\mathrm{Im}M_{12} + i\mathrm{Im}\Gamma_{12}/2}{(\Gamma_S - \Gamma_L)/2 - i\Delta m}$$

$$= \frac{\sin\phi_{SW}}{\Delta m} e^{i\phi_{SW}} \left[-\mathrm{Im}M_{12} + i\frac{\mathrm{Im}\Gamma_{12}}{2} \right] \tag{11.37}$$

$$\delta = \frac{\widetilde{M}_{11} - \widetilde{M}_{22}}{2\Delta} = \frac{(\Gamma_{11} - \Gamma_{22})/2 + i(M_{11} - M_{22})}{2\{(\Gamma_S - \Gamma_L)/2 - i\Delta m\}}$$

$$= \frac{\sin\phi_{SW}}{2\Delta m} e^{i\phi_{SW}} \left[\frac{\Gamma_{11} - \Gamma_{22}}{2} + i(M_{11} - M_{22}) \right] \tag{11.38}$$

のように書き表せる．ただし，

$$\phi_{SW} \equiv \tan^{-1}\frac{2\Delta m}{\Gamma_S - \Gamma_L} \simeq 43.49 \pm 0.08^\circ \tag{11.39}$$

を定義した．

演習 11.3　(11.36)～(11.38) を導け．

CPT が保存すれば，$\widetilde{M}_{11} = \widetilde{M}_{22}$，$CP$ が保存すれば，$\widetilde{M}_{12} = \widetilde{M}_{21}$ が成立するので (付録G)，δ は CPT の破れを，ε は CP の破れを表すパラメターである．実験的に $\varepsilon \neq 0$, $\delta \simeq 0$ が示せるので (後述，§11.4)，この節では CPT 保存を仮定し $\delta = 0$ とする．このとき，(11.32) を書き直して

$$|K_S\rangle = ((1+\varepsilon)|K^0\rangle + (1-\varepsilon)|\bar{K}^0\rangle)/\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)} \equiv p|K^0\rangle + q|\bar{K}^0\rangle$$

$$|K_L\rangle = ((1+\varepsilon)|K^0\rangle - (1-\varepsilon)|\bar{K}^0\rangle)/\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)} \equiv p|K^0\rangle - q|\bar{K}^0\rangle$$

$$|p|^2+|q|^2=1, \qquad \varepsilon=\frac{p-q}{p+q} \tag{11.40}$$

と表す．固有値は (11.9) を参照して

$$\lambda_{\mathrm{S,L}}=M_{\mathrm{S,L}}-\frac{i\Gamma_{\mathrm{S,L}}}{2}=\frac{\widetilde{M}_{11}+\widetilde{M}_{22}}{2}\pm\sqrt{\widetilde{M}_{12}\widetilde{M}_{21}} \tag{11.41}$$

であるので，$\Delta\equiv\lambda_{\mathrm{S}}-\lambda_{\mathrm{L}}$ は

$$\Delta=(M_{\mathrm{S}}-M_{\mathrm{L}})-i\frac{(\Gamma_{\mathrm{S}}-\Gamma_{\mathrm{L}})}{2}=\Delta m_{\mathrm{k}}-i\frac{\Delta\Gamma_{\mathrm{k}}}{2}\simeq-i\left(\frac{\Gamma_{\mathrm{S}}}{2}-i\Delta m\right) \tag{11.42}$$

$$\left(\Delta m_{\mathrm{k}},\ \frac{\Delta\Gamma_{\mathrm{k}}}{2}\right)=(2\mathrm{Re},\ -2\mathrm{Im})\sqrt{\widetilde{M}_{12}\widetilde{M}_{21}} \tag{11.43}$$

p, q を行列要素で表せば

$$\frac{q}{p}=\sqrt{\frac{\widetilde{M}_{21}}{\widetilde{M}_{12}}}=\sqrt{\frac{M_{12}^*-i\Gamma_{12}^*/2}{M_{12}-i\Gamma_{12}/2}} \tag{11.44}$$

と書ける．

演習 11.4 (11.44) を証明せよ．

Γ_{12} は，(11.7 c) の表式でわかるように質量殻上（エネルギーを保存する遷移行列）にあるので，$\mathrm{Im}\Gamma_{12}$ は崩壊率の実験データから推察が可能である．数値を評価してみると ε に対する寄与は小さい．つまり，$\mathrm{Im}\Gamma_{12}\ll\mathrm{Im}M_{12}$ であることがいえる（後述；式 (11.73) 参照)．この結果，1° の数分の 1 の精度で，

$$\arg(\varepsilon)\simeq\phi_{\mathrm{SW}}\equiv\tan^{-1}\left(\frac{2\Delta m}{\Gamma_{\mathrm{S}}-\Gamma_{\mathrm{L}}}\right) \tag{11.45}$$

が成立する．

b. 崩壊パラメター η_{+-}, η_{00}

いままでの議論は CP の破れが K_1 と K_2 の混合に起因する場合のパラメター ε についての考察である．しかし，CP 非保存の効果は質量行列のみならず崩壊過程にも現れるので[*2)]，その場合のパラメターをも考察する．CP 非保存の効果として直接実験で測定されている主なパラメターは次の三つである．

$$\eta_{+-}\equiv\frac{\langle\pi^+\pi^-|T|\mathrm{K}_{\mathrm{L}}\rangle}{\langle\pi^+\pi^-|T|\mathrm{K}_{\mathrm{S}}\rangle}=|\eta_{+-}|\exp(i\phi_{+-}) \tag{11.46 a}$$

---

*2) 崩壊過程に現れる CP の破れを直接の破れ，混合を通す破れを間接の破れともいう．

$$\eta_{00} \equiv \frac{\langle \pi^0\pi^0 | T | \mathrm{K_L} \rangle}{\langle \pi^0\pi^0 | T | \mathrm{K_S} \rangle} = |\eta_{00}| \exp(i\phi_{00}) \tag{11.46 b}$$

$$A_\mathrm{L} \equiv \frac{\Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^+ \nu_\mathrm{e} \pi^-) - \Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^- \bar{\nu}_\mathrm{e} \pi^+)}{\Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^+ \nu_\mathrm{e} \pi^-) + \Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^- \bar{\nu}_\mathrm{e} \pi^+)} \tag{11.47}$$

3 体の準レプトンモードは，CP の固有状態ではないので，$\mathrm{K_L}$ のみならず $\mathrm{K_S}$ も崩壊できるが，$\mathrm{K_S}$ の場合は 2π 崩壊モードが圧倒的に大きいので，分岐比そのものが，

$$\frac{\Gamma(\mathrm{K_S} \to \mathrm{e}\nu\pi)}{\Gamma_\mathrm{S}} \sim \frac{\Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}\nu\pi)}{\Gamma_\mathrm{S}} = \mathrm{BR}(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}\nu\pi)\frac{\Gamma_\mathrm{L}}{\Gamma_\mathrm{S}} \sim 10^{-3} \tag{11.48}$$

程度と小さく，CP 非保存の効果はさらにその 10^{-3} 程度と予想されるので，ほとんど観測にかからない．CP の破れは，$\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e}\pi^-$ と，その CP 変換である $\mathrm{e}^-\bar{\nu}_\mathrm{e}\pi^+$ への崩壊率の差，つまり非対称 A_L として現れる．非対称は，e の代わりに μ で置き換えたモードにも同様に現れる．

11.2.3 η_{+-} と η_{00} の測定

$|\eta_{+-}|, |\eta_{00}|$ は $\mathrm{K_L}$ および $\mathrm{K_S}$ の 2π 崩壊率の比より決められる．位相角 ϕ_{+-}，ϕ_{00} は，$\mathrm{K_S} \to 2\pi$ と $\mathrm{K_L} \to 2\pi$ の干渉効果として観測可能である．いま

$$\psi = |\mathrm{K_L}\rangle + \rho|\mathrm{K_S}\rangle \tag{11.49}$$

で表される K ビームがあるとしよう．このビームから得られる 2π の数は $|\langle 2\pi|\psi(t)\rangle|^2$ に比例するから

$$\begin{aligned} N_{2\pi} &= N_\mathrm{K}|\rho \mathrm{e}^{(i\Delta m - \Gamma_\mathrm{S}/2)t} + \eta \mathrm{e}^{-(\Gamma_\mathrm{L}/2)t}|^2 \\ &= N_\mathrm{K}\{|\eta|^2\mathrm{e}^{-\Gamma_\mathrm{L}t} + |\rho|^2\mathrm{e}^{-\Gamma_\mathrm{S}t} + 2\mathrm{e}^{-\bar{\Gamma}t}|\eta\rho|\cos(\Delta mt + \phi_\rho - \phi_\eta)\} \end{aligned} \tag{11.50 a}$$

$$\phi_\rho = \arg(\rho), \qquad \phi_\eta = \arg(\eta_{+-} \text{ または } \eta_{00}) \tag{11.50 b}$$

$$\bar{\Gamma} = (\Gamma_\mathrm{S} + \Gamma_\mathrm{L})/2 \tag{11.50 c}$$

この ρ は二つの方法で与えることができる．

第 1 の方法は $t=0$ で純粋な $\mathrm{K}^0\,(\bar{\mathrm{K}}^0)$ ビームが得られる場合で，$\rho=1\,(-1)$，$\phi_\rho=0$ である（最初に K^0 が N 個，$\bar{\mathrm{K}}^0$ が $\bar{N}$ 個あった場合は，(11.50) の第 2 項を $|\rho|^2 \to 1$，第 3 項を $|\rho| \to (N-\bar{N})/(N+\bar{N})$ で置き換える）．干渉効果を最大にするためには，$|\rho|\exp(-\bar{\Gamma}t) \sim |\eta| \sim 10^{-3}$ にする必要があり，$L \simeq 12\Lambda_\mathrm{S}$ くらいのところに測定器を設置する．2π の数の干渉効果の時間変化から Δm と ϕ が符号を含めて直接に決められる（ただし，歴史的には，$\Delta m, \phi$ ともに最初

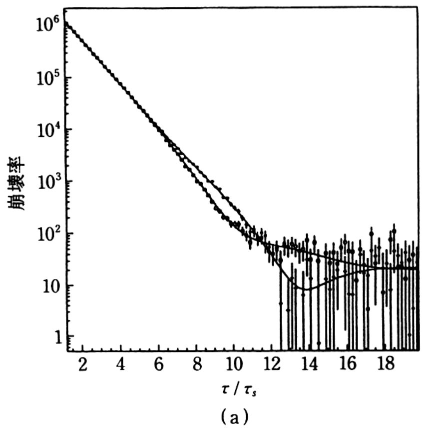
は第2の再生の方法で決められた). 図11.6にCPLEARでの実験結果を示す[6]. 図11.6 (a) には, K^0 と $\bar{K}^0$ の崩壊曲線が, 図11.6 (b) には

$$A_{\mathrm{red}}=\frac{N_{2\pi}(\rho=-1)-N_{2\pi}(\rho=1)}{N_{2\pi}(\rho=-1)+N_{2\pi}(\rho=1)}\cdot e^{-(\Gamma_S-\Gamma_L)t/2}=-\frac{2|\eta_{+-}|\cos(\Delta mt-\phi_{+-})}{1+|\eta_{+-}|^2e^{(\Gamma_S-\Gamma_L)t}}$$

が描いてある. η などの値は世界平均をとると[7]

$$|\eta_{+-}|=2.268\pm0.023\times10^{-3}$$
$$|\eta_{00}|=2.253\pm0.024\times10^{-3}$$
$$\phi_{+-}=46.0\pm1.2^\circ$$
$$\phi_{00}=48.5\pm3.1^\circ \tag{11.51}$$

第2の方法では K_L ビームを再生用標的に通す. この場合再生標的の厚さを L として, $\rho=\rho(L)$ (11.20) である. このとき測定される位相は, $\Delta mt+\phi_\rho-\phi_\eta$ であり, t と L (ϕ_ρ の中にある) と両方変えられるので ϕ_η が測定できる. 同じ再生標的で準レプトン崩壊モードをみれば, $\phi_\eta=0$ であるので ϕ_ρ が決められる. 再生標的を使う方法は, ϕ_ρ に付随する系統誤差があり精度は必ずしもよくないが, 同じ再生標的で, $\pi^+\pi^-$ と $\pi^0\pi^0$ 双方のモードを測定し引き算をすれば, ρ に付随する誤差はほとんどキャンセルするので, $\phi_{00}-\phi_{+-}$ に



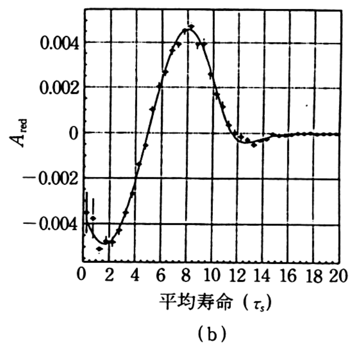


図11.6　純粋な K^0, $\bar{K}^0$ ビームの寿命曲線 (a) と干渉効果 (b)[6]
(b) には,

$$A_{\mathrm{red}}=\frac{N(\bar{K}^0)-N(K^0)}{N(\bar{K}^0)+N(K^0)}e^{-(\Gamma_S-\Gamma_L)t/2}$$

をプロットしてある.

関しては非常によい精度で得られる．最新の結果によれば[8~10]，

$$\Delta\phi \equiv \phi_{00} - \phi_{+-} = 0.62 \pm 1.03^\circ \tag{11.52}$$

であり，$\phi_{00} = \phi_{+-}$ と矛盾しない結果が得られている．

11.2.4　非対称パラメター A_L の決定

$K \to \pi l\nu$ 崩壊の非対称決定は以下のようにする．$K \to \pi l\nu$ の遷移確率は第10章の (10.98)，(10.99) より，

$$T_{fi} = (G_F/\sqrt{2})\sin\theta_c\, l_\mu S^\mu \tag{11.53}$$

$$l_\mu = \langle l\nu|\,\overline{\psi}_l\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_\nu|0\rangle \tag{11.54 a}$$

$$S^\mu = \langle\pi|J_v{}^\mu|K\rangle = \{f_+(k_K{}^\mu + k_\pi{}^\mu) + f_-(k_K{}^\mu - k_\pi{}^\mu)\} \tag{11.54 b}$$

の形に書ける．$f_\pm$ は形状因子で，$q^2 = (k_K - k_\pi)^2$ の関数である．S^μ はレプトンカレント $\langle l_\mu\rangle$ とのスカラー積をとると，f_- の項はレプトンの質量 m_l^2 に比例するので，$l = e$ のときは無視してよい．反応の種類に応じて，

$$\text{(A)}\quad f_\pm : K^0 \to \pi^- l^+ \nu_l, \qquad \text{(B)}\quad \overline{f}_\pm : \overline{K}^0 \to \pi^+ l^- \overline{\nu}_l \tag{11.55}$$

$$\text{(C)}\quad g_\pm : \overline{K}^0 \to \pi^- l^+ \nu_l, \qquad \text{(D)}\quad \overline{g}_\pm : K^0 \to \pi^+ l^- \overline{\nu}_l \tag{11.56}$$

のように形状因子を表す．CRT 保存が成り立てば，$\overline{f}_\pm = -f_\pm{}^*$，$\overline{g}_\pm = -g_\pm{}^*$ が成立し，T 保存が成立すればすべての形状因子は実数である（付録G）．$\Delta S = \Delta Q$ が成立していれば (C)，(D) の反応は禁止される．以下は，$x = g/f = 0$ を仮定する（§10.4.1の議論を参照）．(11.55) を入れれば，$Kl3$ 崩壊の振幅は，

$$\langle\pi^- e^+\nu|T|K_S\rangle$$
$$\propto (1+\varepsilon)\langle\pi^- e^+\nu|T|K^0\rangle + (1-\varepsilon)\langle\pi^- e^+\nu|T|\overline{K}^0\rangle = (1+\varepsilon)f \tag{11.57 a}$$

$$\langle\pi^- e^+\nu|T|K_L\rangle \quad\propto\quad (1+\varepsilon)f \tag{11.57 b}$$

$$\langle\pi^+ e^-\overline{\nu}|T|K_S\rangle \quad\propto\quad (1-\varepsilon)f^* \tag{11.57 c}$$

$$\langle\pi^+ e^-\overline{\nu}|T|K_L\rangle \quad\propto\quad -(1-\varepsilon)f^* \tag{11.57 d}$$

と書ける．これから，$t=0$ で純粋に $K^0\,(\overline{K}^0)$ であったビームのレプトン崩壊振幅 $A^\mp = \langle\pi^\pm e^\mp\nu|T|K^0(\overline{K}^0)\rangle$ は次のように表される．

$$A^+ \quad\propto\quad (1+\varepsilon)f[e^{-i\lambda_S t} \pm e^{-i\lambda_L t}] \tag{11.58 a}$$

$$A^- \quad\propto\quad (1-\varepsilon)f^*[e^{-i\lambda_S t} \mp e^{-i\lambda_L t}] \tag{11.58 b}$$

ε は小さい量であるので，高次の項を無視すれば，$t=0$ で純粋な $K^0(\bar{K}^0)$ から出発した非対称量 A_L は，

$$A_L=\frac{|A^+|^2-|A^-|^2}{|A^+|^2+|A^-|^2}=2\mathrm{Re}\varepsilon\pm2\frac{e^{-\frac{(\Gamma_S+\Gamma_L)t}{2}}\cos\Delta mt}{e^{-\Gamma_S t}+e^{-\Gamma_L t}}$$

$$\overset{t\gg3/\Gamma_S}{\approx}2\mathrm{Re}\varepsilon\pm2e^{-\frac{(\Gamma_S-\Gamma_L)t}{2}}\cos\Delta mt \tag{11.59}$$

で与えられる．図 11.7 (a), (b)[11] は，K_L の電子および μ 崩壊モードの非対称性を，時間の関数として描いたものであり，干渉項と最後まで残る非対称が明瞭にみられる．

$t\gg10\Gamma_S^{-1}$ では，非対称は，

$$A_L=2\mathrm{Re}\varepsilon=(3.27\pm0.12)\times10^{-3} \tag{11.60}$$

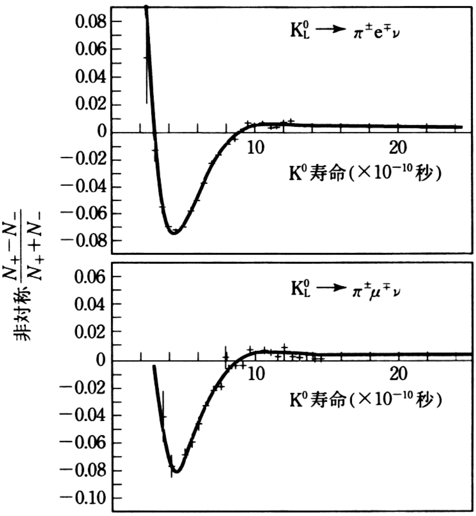


図 11.7 $K_L{}^0\to\pi^\pm e^\mp\nu$, $\pi^\pm\mu^\mp\nu$ の非対称[11]
非対称が時間の関数として振動して，最後まで残る部分が CP の破れの効果を示す．途中の干渉効果は CP の破れによるものではなく，混合によって起こる．

11.3 パラメター ε, ε′ の決定

11.3.1 ε の 決 定

$K^0, \bar{K}^0$ の崩壊先はいろいろあるが，部分崩壊率として圧倒的に大きいのは，

2π 崩壊モードである．まず，準備として，2π 状態をアイソスピン状態に分解する．

$$|+-\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}|I=0\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}|I=2\rangle \tag{11.61 a}$$

$$|00\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}|I=0\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}|I=2\rangle \tag{11.61 b}$$

2π は，角運動量が0であるので，ボーズ対称性からアイソスピン波動関数は対称でなければならず，反対称の $I=1$ 状態は存在しない．次に $\mathrm{K}\to 2\pi$ の崩壊振幅は CPT を仮定すれば，

$$T_\mathrm{I}=\langle 2\pi, I|T|K^0\rangle=A_\mathrm{I}\mathrm{e}^{i\delta_\mathrm{I}} \tag{11.62 a}$$

$$\bar{T}_\mathrm{I}=\langle 2\pi, I|T|\bar{K}^0\rangle=A_\mathrm{I}{}^*\mathrm{e}^{i\delta_\mathrm{I}} \tag{11.62 b}$$

と書ける（付録G）．CP 非保存の場合は $A_\mathrm{I}\neq A_\mathrm{I}{}^*$ である．ここに δ_I は，最終状態でのアイソスピン I 状態の散乱の位相のズレである．

次に

$$\alpha\equiv\frac{\langle I=0|T|\mathrm{K}_2\rangle}{\langle I=0|T|\mathrm{K}_1\rangle}=\frac{\langle 0|T|\mathrm{K}^0\rangle-\langle 0|T|\bar{\mathrm{K}}\rangle}{\langle 0|T|\mathrm{K}^0\rangle+\langle 0|T|\bar{\mathrm{K}}\rangle}=\frac{T_0-\bar{T}_0}{T_0+\bar{T}_0}=\frac{i\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0} \tag{11.63}$$

を定義する．また，$I=0, 2$ の崩壊振幅パラメターを次式で定義する．CPT 保存ならば，$\varepsilon_\mathrm{L}=\varepsilon_\mathrm{S}=\varepsilon$ であるから

$$\varepsilon_0\equiv\frac{\langle I=0|T|L\rangle}{\langle I=0|T|S\rangle}=\frac{\langle 0|T|\mathrm{K}_2\rangle+\varepsilon\langle 0|T|\mathrm{K}_1\rangle}{\langle 0|T|\mathrm{K}_1\rangle+\varepsilon\langle 0|T|\mathrm{K}_2\rangle}\simeq\alpha+\varepsilon \tag{11.64}$$

$$\varepsilon_2\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\langle I=2|T|L\rangle}{\langle I=0|T|S\rangle}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\langle 2|T|\mathrm{K}_2\rangle+\varepsilon\langle 2|T|\mathrm{K}_1\rangle}{\langle 0|T|\mathrm{K}_1\rangle+\varepsilon\langle 0|T|\mathrm{K}_2\rangle}\simeq\varepsilon'+\varepsilon_0\omega \tag{11.65}$$

$$\varepsilon'\simeq\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\langle I=2|T|\mathrm{K}_2\rangle}{\langle I=0|T|\mathrm{K}_1\rangle}-\alpha\omega=i\omega\left[\frac{\mathrm{Im}A_2}{\mathrm{Re}A_2}-\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}\right] \tag{11.66}$$

$$\omega\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\langle 2|T|S\rangle}{\langle 0|T|S\rangle}\simeq\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{Re}A_2}{\mathrm{Re}A_0}\mathrm{e}^{i(\delta_2-\delta_0)} \tag{11.67}$$

ω は，$\Delta I=1/2$ を破る遷移の相対振幅であり，絶対値と位相は次の関係式より導くことができる．ρ は位相体積を示す．$|\omega|$ はだいたい ~ 0.03 程度の値をもつ．

$$|\omega|^2\simeq\frac{2}{3}\frac{\Gamma(\mathrm{K}^+\to\pi^+\pi^0)}{\Gamma(\mathrm{K_S}\to 2\pi)}=(3.19\times 10^{-2})^2 \tag{11.68 a}$$

$$\mathrm{Re}\omega \simeq \frac{1}{12}\left\{\frac{\rho_{00}}{\rho_{+-}}\frac{\Gamma(\mathrm{K_S}\to\pi^+\pi^-)}{\Gamma(\mathrm{K_S}\to\pi^0\pi^0)}-2\right\} \tag{11.68 b}$$

上式より，$\arg(\omega)$ の実測値 $\pm 55.6^\circ$ となるが，(11.67) より与えられる ω の位相，すなわち $\pi\pi$ 散乱の位相差

$$\delta_2-\delta_0=-43.7\pm 4^\circ \text{ [12)]} \tag{11.69}$$

とだいたい一致している．

$|\mathrm{K}^0\rangle$ と $|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle$ の相対位相は任意にとれるので ((11.3) で適当な位相を掛けることに相当する)，

$$\mathrm{Im}A_0=0 \tag{11.70}$$

となるように選ぶことがしばしばある．これを，ウー-ヤン (Wu-Yang) の位相[13)] と呼ぶ．この場合，$\omega\varepsilon_0$ を省略する近似で，

$$\varepsilon_0=\varepsilon, \qquad \varepsilon_2=\varepsilon' \tag{11.71}$$

となる．つまり，$I=0$ の崩壊のパラメターである ε_0 と混合のパラメターである ε とは同じものであることが示せる．ε' はこれに反し，混合とは関係のない純粋に崩壊のパラメターである．この議論からわかるように，ε は位相のとり方により値を変えるので観測量ではない．$\mathrm{Re}\varepsilon$ が観測量である ((11.60) 参照)．一方，$\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon'$ は観測量で位相のとり方によらない．

後の便宜のため ε_0 の表式を別の形に書き換えておく．$\Gamma_\mathrm{S}\gg\Gamma_\mathrm{L}$, $\Gamma_\mathrm{S}\simeq\Gamma_{2\pi}$ であるので，Γ_{12} の中間状態としては 2π を考慮すれば十分良い近似となる．位相空間体積を ρ とし，(11.62) で定義される崩壊振幅 A_I を使うと，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\Gamma_{12}&\approx[\mathrm{Im}(\langle K^0|T|I=0\rangle\langle I=0|T|\bar{K}^0\rangle)+\{I=2\text{ の寄与}\}]\rho\\&=\mathrm{Im}(A_0^{*2}+A_2^{*2})\rho=-2(\mathrm{Re}A_0\mathrm{Im}A_0+\mathrm{Re}A_2\mathrm{Im}A_2)\rho\end{aligned} \tag{11.72 a}$$

$$\Gamma_\mathrm{S}\approx[|\langle I=0|T|(K^0+\bar{K}^0)/\sqrt{2}\rangle|^2+\{I=2\text{ の寄与}\}]\rho\approx 2(\mathrm{Re}A_0)^2\rho \tag{11.72 b}$$

ウー-ヤンの位相を使えば，$\mathrm{Im}A_0=\alpha=0$ とできるから，

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{Im}\Gamma_{12}}{\Gamma_\mathrm{S}}\approx-\left[\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}+\frac{\mathrm{Re}A_2\mathrm{Im}A_2}{(\mathrm{Re}A_0)^2}\right]\sim-2|\omega^2\varepsilon'| \tag{11.72 c}$$

実験事実 ($\omega\sim 0.03$, $|\varepsilon'/\varepsilon_0|\lesssim 10^{-3}$；後述，式 (11.102)) を使えば，$\mathrm{Im}\Gamma_{12}/(\varepsilon\Gamma_\mathrm{S})\ll 1$ である．$2\Delta m/\Gamma_\mathrm{S}\approx 1$ を使うと (11.37) は，

$$|\varepsilon|\approx\sqrt{2}(|\mathrm{Im}M_{12}|^2+|\mathrm{Im}\Gamma_{12}|^2/4)^{1/2}/\Gamma_\mathrm{S} \tag{11.73 a}$$

を意味するから，$\mathrm{Im}\Gamma_{12}$ の ε にたいする寄与も無視できる．すなわち，

$$\mathrm{Im}\Gamma_{12} \ll \mathrm{Im}M_{12} \tag{11.73 b}$$

ε_0 や ε' を理論計算するとき必ずしもウー–ヤンの定義を採用するとは限らないので，通常は $\mathrm{Im}A_0 \neq 0$ のときの一般の式を与えておく．(11.64) に，ε の式 (11.37) と (11.72 c) を入れ，$\tan\phi_{\mathrm{SW}} \simeq 1$ を使えば，

$$\varepsilon_0 \simeq \frac{e^{i\phi_{\mathrm{SW}}}}{\sqrt{2}}\left[-\frac{\mathrm{Im}M_{12}}{\Delta m} + \frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}\right] \tag{11.74}$$

次に

$$\begin{aligned}\langle I=0|T|L\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\langle +-|T|L\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 00|T|L\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\eta_{+-}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\langle I=0|T|S\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\langle I=2|T|S\rangle\right] \\ &\quad + \sqrt{\frac{1}{3}}\eta_{00}\left[\sqrt{\frac{1}{3}}\langle I=0|T|S\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle I=2|T|S\rangle\right]\end{aligned} \tag{11.75}$$

であるので，

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{2}{3}\eta_{+-} + \frac{1}{3}\eta_{00}\right) + \frac{2}{3}(\eta_{+-} - \eta_{00})\omega \tag{11.76 a}$$

同様に

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3}(\eta_{+-} - \eta_{00}) + \frac{1}{3}(\eta_{+-} + 2\eta_{00})\omega \tag{11.76 b}$$

あるいは逆に，η_{+-}, η_{00} を ε_0, ε_2 で表すと

$$\eta_{+-} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_2}{1+\omega} \simeq \varepsilon_0 + \varepsilon', \qquad \eta_{00} = \frac{\varepsilon_0 - 2\varepsilon_2}{1-2\omega} \simeq \varepsilon_0 - 2\varepsilon' \tag{11.77}$$

実験的には，(11.51)，(11.52) を入れることにより，

$$|\eta_{+-}| \simeq |\eta_{00}| \tag{11.78 a}$$

$$\phi_{00} \simeq \phi_{+-} = 46.0 \pm 1.2^\circ \simeq \phi_{\mathrm{SW}} \tag{11.78 b}$$

であるので，

$$\varepsilon_0 \simeq \eta_{+-} \simeq \eta_{00}, \tag{11.79 a}$$

$$|\varepsilon'| \ll |\varepsilon_0| \tag{11.79 b}$$

が第 1 近似としていえる．また，ε_0 の位相値がほぼ ϕ_{SW} に等しいことは，式 (11.74) と合っている．後の便宜のため

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0/\!/} e_{/\!/} + \varepsilon_{0\perp} e_\perp \tag{11.80 a}$$

$$e_{/\!/} = e^{i\phi_{\mathrm{SW}}} = \cos\phi_{\mathrm{SW}} + i\sin\phi_{\mathrm{SW}} \tag{11.80 b}$$

$$e_{\perp}=ie^{i\phi_{SW}}=-\sin\phi_{SW}+i\cos\phi_{SW} \tag{11.80 c}$$

を定義すると，(11.78) は，$|\varepsilon_{0\perp}|\ll|\varepsilon_{0/\!/}|$ を意味する．

11.3.2 ε′ の 決 定

ε' は，ε が状態の混合によって CP を破るのと異なり，$I=2$ 状態への，つまり $\Delta I=1/2$ を破る崩壊反応で CP を破ることを示す．(11.65)，(11.76) から，

$$\begin{aligned}\varepsilon'&=\varepsilon_2-\varepsilon_0\omega\\&=\frac{1}{3}(\eta_{+-}-\eta_{00})+\frac{1}{3}(\eta_{+-}+2\eta_{00}-3\varepsilon_0)\omega\\&\simeq\frac{1}{3}(\eta_{+-}-\eta_{00})\end{aligned} \tag{11.81}$$

という近似式が成立する．

$$\mathrm{Arg}(\varepsilon')=\mathrm{Arg}(i\omega)=\frac{\pi}{2}+\delta_2-\delta_0\simeq 43\pm4^\circ\simeq\phi_{SW} \tag{11.82}$$

であるので，

$$\varepsilon'_{/\!/}/|\varepsilon_0|=\mathrm{Re}(\varepsilon'/\varepsilon_0)\simeq|\varepsilon'/\varepsilon_0| \tag{11.83 a}$$

$$\varepsilon'_{\perp}/|\varepsilon_0|=\mathrm{Im}(\varepsilon'/\varepsilon_0) \tag{11.83 b}$$

$$|\varepsilon'_{\perp}|\ll|\varepsilon'_{/\!/}| \tag{11.83 c}$$

がいえる．$\eta_{+-}\simeq\eta_{00}$，$\phi_{+-}\simeq\phi_{00}\simeq\phi_{SW}$ であるので，

$$\varepsilon'_{\perp}\simeq\frac{|\eta_{+-}|}{3}(\phi_{+-}-\phi_{00})=-\frac{|\eta_{+-}|}{3}\Delta\phi \tag{11.84}$$

η_{+-}, η_{00} が測定できているので，$\varepsilon'_{/\!/}$ の値を導くことも可能であるが精度が悪い．実験的には，$\mathrm{Re}(\varepsilon'/\varepsilon_0)$ が直接測定できる．現在フェルミ研究所の E731 グループは，0 と矛盾しない値 $(7.4\pm5.2\pm2.9\times10^{-4})$[14] をだしているが，CERN の NA 31 グループは有限値を与えている $(23\pm7\times10^{-4})$[15]．ここでは，ε' が小さいという実験事実

$$\frac{\varepsilon'_{/\!/}}{|\varepsilon_0|}=\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\right)\simeq\frac{1}{6}\left[\left|\frac{\eta_{+-}}{\eta_{00}}\right|^2-1\right]\lesssim3\times10^{-3} \tag{11.85}$$

を指摘するだけに止めておく．ε' が 0 かまたは有限値をとるかの決定は，CP の破れが単に混合によるものか，崩壊に関与する相互作用にも存在するものなのかを左右する重要な選択である．

11.4　CPT 対称性の検証[16,17](＊)

いままでは，CPT 保存を仮定してきたが，この仮定がどのくらいの精度で成立しているかを議論する．そのためにまず，前節で行った議論が，CPT を仮定しない場合はどうなるかを考察する．CP 非保存の場合と同じく，直接的と間接的 CPT 非保存の2種に分けて考える．直接的とはKの崩壊で CPT が破れ，間接的とは混合パラメター δ ((11.33) 参照) が0でないことにより CPT が破れることをいう．後者の場合，$\varepsilon_{\rm L}=\varepsilon-\delta$, $\varepsilon_{\rm S}=\varepsilon+\delta$ となる．

CPT 対称性を仮定しない場合の $\mathrm{K}\to 2\pi$ の崩壊振幅を

$$\langle 2\pi, I|T|\mathrm{K}^0\rangle=(A_{\rm I}+B_{\rm I})e^{i\delta_{\rm I}} \tag{11.86 a}$$

$$\langle 2\pi, I|T|\overline{\mathrm{K}}^0\rangle=(\overline{A}_{\rm I}+\overline{B}_{\rm I})e^{i\delta_{\rm I}} \tag{11.86 b}$$

$$\langle e^+\nu_e\pi^-|T|\mathrm{K}^0\rangle=a+b \text{ *3)} \tag{11.86 c}$$

$$\langle e^-\overline{\nu}_e\pi^+|T|\overline{\mathrm{K}}^0\rangle=\overline{a}+\overline{b} \tag{11.86 d}$$

と書く．CPT が保存すれば，$\overline{A}+\overline{B}=(A+B)^*$ でなければならないので (G.19)，$\overline{A}=A^*$, $\overline{a}=a^*$, $\overline{B}=-B^*$, $\overline{b}=-b^*$ とおけば，$A_{\rm I}, a$ は CPT 保存項を，そして $B_{\rm I}, b$ は CPT 非保存項を表すことになる．さらに

$$A_{\rm I}={\rm Re}A_{\rm I}+i{\rm Im}A_{\rm I}, \qquad B_{\rm I}={\rm Re}B_{\rm I}+i{\rm Im}B_{\rm I} \tag{11.87 a}$$

$$a={\rm Re}a+i{\rm Im}a, \qquad b={\rm Re}b+i{\rm Im}b \tag{11.87 b}$$

と分解すると，T 保存は $A_{\rm I}^*=A_{\rm I}$, $B_{\rm I}^*=B_{\rm I}$ を，CP 保存は $\overline{A}_{\rm I}=A_{\rm I}$, $\overline{B}_{\rm I}=B_{\rm I}$ を要求するから，各振幅は

${\rm Re}A_{\rm I}$：CPT 保存，　T 保存，　CP 保存

${\rm Im}A_{\rm I}$：CPT 保存，　T 非保存，　CP 非保存

${\rm Re}B_{\rm I}$：CPT 非保存，　T 保存，　CP 非保存

$ImB_{\rm I}$：CPT 非保存，　T 非保存，　CP 保存

を表すことになる．$|B_{\rm I}|\ll|A_{\rm I}|$, $\delta\ll\varepsilon$ がいえれば，CPT 保存の仮定がよいことになる．a, b についても同様な議論が成立する．

---

*3) (11.57) では f と書いた．$\Delta S=\Delta Q$ を仮定しなければ，考慮すべき振幅はもう二つ増える[17]．$x=a(\Delta S=-\Delta Q)/a(\Delta S=\Delta Q)\approx 7\times 10^{-7}$ であるので，この近似はよいと考えられる[18]．

$\pi\pi$ 散乱の位相差 $\delta_2-\delta_0$ は，$-47\pm4^\circ$ で，*CPT* を仮定したときの $\arg(\omega)$ の実測値 $\pm55.6^\circ$ とだいたい一致している．B 項を取り入れたときの ω の式

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{Re}A_2+i\mathrm{Im}B_2}{\mathrm{Re}A_0+i\mathrm{Im}B_0}\mathrm{e}^{i(\delta_2-\delta_0)} \tag{11.88}$$

と比較してみれば，$\mathrm{Im}(B_\mathrm{I})\ll\mathrm{Re}(A_\mathrm{I})$ という推定は悪くないであろう．この近似を用いると，$A_\mathrm{L}, \alpha, \varepsilon_0, \varepsilon'$ の式 (11.60)，(11.63)～(11.66) は，次のように書き換えられる．

$$\frac{1}{2}A_\mathrm{L}=\mathrm{Re}\varepsilon-\left\{\mathrm{Re}\delta-\frac{\mathrm{Re}b}{\mathrm{Re}a}\right\}^{*4)} \tag{11.89}$$

$$\alpha=\frac{i\mathrm{Im}A_0+\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0-i\mathrm{Im}B_0}\simeq i\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}+\left\{\frac{\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0}\right\} \tag{11.90}$$

$$\varepsilon_0\simeq\alpha+\varepsilon_\mathrm{L}=\alpha+\varepsilon-\delta\simeq\frac{\mathrm{e}^{i\phi_\mathrm{SW}}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\mathrm{Im}M_{12}}{\Delta m}+\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}\right)-\left\{\delta-\frac{\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0}\right\} \tag{11.91}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon'&\simeq \mathrm{i}\omega\left[\frac{\mathrm{Im}A_2-i\mathrm{Re}B_2}{\mathrm{Re}A_2+i\mathrm{Im}B_2}-\frac{\mathrm{Im}A_0-i\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0+i\mathrm{Im}B_0}\right]\\&\simeq \mathrm{i}\omega\left[\left(\frac{\mathrm{Im}A_2}{\mathrm{Re}A_2}-\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}\right)-i\left\{\frac{\mathrm{Re}B_2}{\mathrm{Re}A_2}-\frac{\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0}\right\}\right]\end{aligned} \tag{11.92}$$

各式の中で $\{\cdots\cdots\}$ が，*CPT* 非保存を仮定することにより新たに付け加わった項である．再定義された $\varepsilon_0, \varepsilon'$ と η_{+-}, η_{00} との関係式 (11.77) は変わらない．

CPT の混合パラメター δ の表式は，(11.38) で与えられている．特に興味があるのは $\delta_\perp$ である．

$$\delta_\perp=\sin\phi_\mathrm{SW}\frac{M_{11}-M_{22}}{2\Delta m}\simeq\frac{m(K)-m(\bar{K})}{2\sqrt{2}\Delta m} \tag{11.93 a}$$

$$\delta_{/\!/}=\cos\phi_\mathrm{SW}\frac{\Gamma_{11}-\Gamma_{22}}{2(\Gamma_\mathrm{S}-\Gamma_\mathrm{L})}\simeq\frac{\mathrm{Re}B_0}{\sqrt{2}\mathrm{Re}A_0} \tag{11.93 b}$$

$\delta_{/\!/}$ の最後の式は，$\mathrm{Im}\Gamma_{12}$ の計算と同様全幅 Γ を 2π への崩壊幅で近似し，$\mathrm{K}\to\pi^+\pi^-$ と $\mathrm{K}\to\pi^0\pi^0$ の位相空間体積を等しいとして ρ とおいたときの関係式

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}-\Gamma_{22}&\simeq\rho[\{|A(\mathrm{K}^0\to\pi^+\pi^-)|^2+|A(\mathrm{K}^0\to\pi^0\pi^0)|^2\}\\&\quad-\{|A(\bar{\mathrm{K}}^0\to\pi^+\pi^-)|^2+|A(\bar{\mathrm{K}}^0\to\pi^0\pi^0)|^2\}]\\&=4\rho[\mathrm{Re}A_0\mathrm{Re}B_0+\mathrm{Re}A_2\mathrm{Re}B_2]\end{aligned}$$

*4) (11.57) で $f\to a+b, \varepsilon\to\varepsilon-\delta$ として (11.59) に入れ，$|a|^2\gg|b|^2, \mathrm{Re}\,a\gg\mathrm{Im}\,a$ を使えば算出できる．

$$\simeq 2\Gamma(\mathrm{K_S}\to 2\pi)\left[\frac{\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0}+2|\omega|^2\frac{\mathrm{Re}B_2}{\mathrm{Re}A_2}\right] \tag{11.94}$$

で第 2 項を無視して得られる．これから

$$\tilde{\delta}\equiv\delta-\frac{\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0}\simeq\frac{ie^{i\phi_{\mathrm{SW}}}}{\sqrt{2}}\left[\frac{M_{11}-M_{22}}{2\Delta m}+\frac{\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0}\right] \tag{11.95}$$

この式は，$\tilde{\delta}$ がほぼ垂直成分 $\tilde{\delta}_\perp$ のみをもつことを意味する．上式と (11.91), (11.92) を比較検討すれば，$\varepsilon, \varepsilon'$ の中の CPT 非保存成分は，崩壊チャネルを 2π に限る近似では，CPT 保存（CP 非保存成分）と位相が $\pi/2$ ずれていること，すなわち $\varepsilon_{0\perp}, \varepsilon'_\perp$ 成分の中にあることがわかる．これらの量の相互関係を図示すると図 11.8 のようになる．CPT 非保存成分を観測量で書き直して整理すると，

$$\frac{\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0}-\frac{\mathrm{Re}b}{\mathrm{Re}a}=\mathrm{Re}\varepsilon_0-\frac{1}{2}A_{\mathrm{L}} \tag{11.96 a}$$

$$-\frac{ie^{i\phi_{\mathrm{SW}}}}{\sqrt{2}}\left[\frac{M_{11}-M_{22}}{2\Delta m}+\frac{\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0}\right]=-\tilde{\delta}=\varepsilon_{0\perp}\simeq|\eta_{+-}|\left(\phi_{+-}-\phi_{\mathrm{SW}}+\frac{1}{3}\Delta\phi\right) \tag{11.96 b}$$

$$|\omega|\left[\frac{\mathrm{Re}B_2}{\mathrm{Re}A_2}-\frac{\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0}\right]=-\varepsilon'_\perp\simeq\frac{1}{3}|\eta_{+-}|\Delta\phi \tag{11.96 c}$$

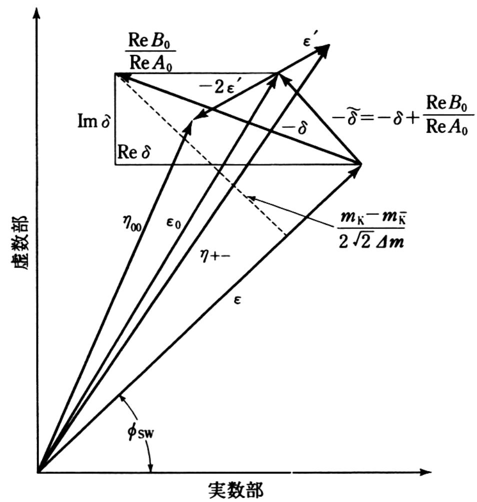


図 11.8 CP を破るパラメターと CPT を破るパラメターの関係図
CPT 不変であれば，$\tilde{\delta}=\mathrm{Re}B_0=0$ である．図は見やすくするために α, $\tilde{\delta}$, ε' を誇張して書いた．実際には，$\eta_{00}\simeq\eta_{+-}\simeq\varepsilon_0$ である．

(11.96 b) を眺めればわかるように，実験値から直接求められるのは，$\tilde{\delta}_\perp$ であり $\delta_\perp$ ではない．$\delta_\perp$ すなわち粒子と反粒子の質量差を知るには，$\mathrm{Re}B_0/\mathrm{Re}A_0$ を決めなければならないが，4 個の未知量に対して 3 個の式があるから，このままでは CPT 非保存のパラメターを全部独立に決めることはできない．ただし，

$$A_S=\frac{\Gamma(\mathrm{K_S}\to \mathrm{e}^+)-\Gamma(\mathrm{K_S}\to \mathrm{e}^-)}{\Gamma(\mathrm{K_S}\to \mathrm{e}^+)+\Gamma(\mathrm{K_S}\to \mathrm{e}^-)}=2\left[\mathrm{Re}\varepsilon+\mathrm{Re}\delta+\frac{\mathrm{Re}b}{\mathrm{Re}a}\right] \tag{11.97}$$

であるので，$\mathrm{K_S}$ の準レプトン崩壊の非対称が測れれば，$\mathrm{Re}\delta$ と $\mathrm{Re}b/\mathrm{Re}a$ を独立に決めることができる[17]．しかし，これには ϕ-ファクトリー*5) などにおける将来の精密測定実験を待たなければならない．そこで，ここでは次のように考える．偶然的な相殺はないものと仮定すれば，(11.96) の各式の優勢項は右辺の数値を超えることはないであろう．このとき第 1 式から次の値が得られる．

$$\left|\frac{\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0}\right|\simeq\left|\frac{\mathrm{Re}b}{\mathrm{Re}a}\right|=(-0.1\pm0.6)\times10^{-4} \quad {}^{19)} \tag{11.98 a}$$

すなわち，$\Delta I=1/2$ 反応で CPT が破れているという証拠はない．また，第 2 式から

$$|\delta_\perp|\lesssim|\varepsilon_{0\perp}|\simeq|\eta_{+-}|(\phi_{+-}-\phi_{\mathrm{SW}}+\Delta\phi/3) \tag{11.98 b}$$

$$\frac{m(K)-m(\bar{K})}{m(K)}=\frac{2\sqrt{2}\Delta m\delta_\perp}{m_\mathrm{K}}<1.3\times10^{-18} \quad {}^{20)} \tag{11.98 c}$$

この値は，現時点で最も厳密な CPT 保存則の証拠となっている．第 3 の式は $\varepsilon'_\perp$ に関するものであるが，

$$\frac{\mathrm{Re}B_2}{\mathrm{Re}A_2}-\frac{\mathrm{Re}B_0}{\mathrm{Re}A_0}\simeq(-0.1\pm0.8)\times10^{-3} \quad {}^{16)} \tag{11.98 d}$$

この式の精度は (11.98 a) の精度に比べはるかに悪い．そこで，$\mathrm{Re}B_0/\mathrm{Re}A_0$ を小さいとして無視すれば，$\mathrm{Re}B_2/\mathrm{Re}A_2$ の上限値が得られる．これに対応する $\varepsilon'_\perp$ の上限は，

$$\left|\frac{\varepsilon'_\perp}{\varepsilon_0}\right|\simeq\left|\frac{\omega\mathrm{Re}B_2}{\varepsilon\mathrm{Re}A_2}\right|\lesssim10^{-2} \tag{11.99}$$

であるので，$\mathrm{Re}|\varepsilon'/\varepsilon_0|\lesssim3\times10^{-3}$ より制限が緩い．CP 非保存ならば，$\varepsilon'_{/\!/}\gg\varepsilon'_\perp$

---

*5) $\mathrm{e^+e^-}\to\phi(1020)\to\mathrm{K\bar{K}}$ により，高強度の良質な K ビームをつくる装置．文献 17 を参照せよ．

であるが，CPT 非保存ならば逆に $\varepsilon'_{\perp} \gg \varepsilon'_{\parallel}$ であるから，実験的には，ε' が CP 非保存効果でなく CPT 非保存効果もしくは両者の混合である可能性を除外できない．

補　足

CPT 不変性は局所量子場の理論の枠組み内では基本定理であり，不変性成立を証明するには，量子力学，ユニタリティ，ローレンツ不変性，局所性など非常に普遍的な原理のみで十分である．ユニタリティには確率の保存が，ローレンツ不変性（あるいは拡張してポアンカレー不変性）にはエネルギー，角運動量の保存が関連するので，これまで最も疑われてきた要因は強い相互作用における局所性の破れであった．しかし，標準理論の成功によりこの可能性もまた薄いと考えられる．最近，ブラックホール輻射などの量子重力理論の発展によって新しい展開がもたらされ，量子重力場の存在が量子波（粒子）の発展に影響を与えることが示唆された[21)]．すなわち，CPT 非保存を議論するときは，これまで聖域としてきた量子力学の破れの効果も考慮する必要がある．

エリスら（Ellis, Mavromatos, D.V. Nanopoulos）は，上記の量子力学の破れをテストする実験を提案した[22)]．この取り扱いでは CPT の破れを量子力学の枠外にまで拡げて，その効果を3個の摂動パラメター α, β, γ で表す．これらのパラメターは質量の次元をもち，$m_{\mathrm{K}}^2/m_{\mathrm{Planck}} \sim 10^{-19}$ GeV 程度の大きさをもつと予想される．現象論的には $\mathrm{K} \to 2\pi$, 3π, $\pi l\nu$ の観測量の CPT 非保存効果が，従来の量子力学枠内でのパラメターのほかに，新しく導入した α, β, γ を使って表せるので，実験データからこれらのパラメターを決めることができる．CPLEARのデータからは上の予想値と矛盾しない値が得られており[23)]，ϕ-ファクトリーなどによる精密実験が可能になれば，モデル検定の可能性もある．

11.5　$Re(\varepsilon'/\varepsilon_0)$ の実験的決定

a.　実験装置

フェルミ研究所の実験 E731[24)] は，CERN の NA31[25)] とともに，最近の固

定標的を使う精密実験がどのように行われるかを示す好例であるので，少し詳細に述べよう．これらの実験の本来の目的は，η_{+-} と η_{00} の違いを約 0.4 %の精度で測ることにより，CP の直接的な破れがあるかどうかを調べることにある．CPT 保存を仮定すれば，$\mathrm{Re}(\varepsilon'/\varepsilon_0)$ は (11.85) で与えられるので，実験的には $\mathrm{K_L}$ と $\mathrm{K_S}$ が $\pi^+\pi^-$ および $\pi^0\pi^0$ に崩壊する分岐比の 2 重比

$$R=\frac{\mathrm{BR}(\mathrm{K_L}\to\pi^+\pi^-)/\mathrm{BR}(\mathrm{K_S}\to\pi^+\pi^-)}{\mathrm{BR}(\mathrm{K_L}\to\pi^0\pi^0)/\mathrm{BR}(\mathrm{K_S}\to\pi^0\pi^0)}\simeq1+6\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\right)\quad(11.100)$$

を用いて測定できる．こうした精密実験では，高度の精密測定器を使用して十分な統計量を蓄めることはもちろんであるが，最終的な誤差の限界となる系統誤差を極力小さくする必要がある．2 重分岐比をとることで種々の系統誤差を大幅に減らせる本質的な利点は有するものの，さらに，ビーム強度の変動，測定器効率の変動，偶発的な偽信号（アクシデンタル）の混入による測定効率の補正などを小さくするなどの細心の注意が必要となる．NA 31 の場合は，崩壊位置による測定効率の急激な変動を避けるため，$\mathrm{K_S}$ をつくる標的を動かして $\mathrm{K_S}$ の崩壊位置分布を $\mathrm{K_L}$ の崩壊分布に近づけている．E 731 の場合は $\mathrm{K_L}$ と $\mathrm{K_S}$ の崩壊を同時に同じ測定器で見ることにより，上記各種の変動，偶発的偽信号による補正を小さくしている．

E 731 の装置を図 11.9 に示す．まず，800 GeV の陽子ビームを 1 次標的に当て，その下流に置いた 2 個の穴をもつコリメーターで，2 次粒子のビームをつくり，電磁石を用いて荷電粒子は曲げてしまい中性のビームをつくる．このビームの中には，$\mathrm{K_L}, \mathrm{K_S}$（と中性子）が存在するが，十分下流では $\mathrm{K_S}$ は崩壊しきっており，純粋な 2 本の K_L ビームが得られる．このうち，片方のビームの下流，1 次標的から 123 m のところに再生標的を置き，$\mathrm{K_S}$ を再生することによって，$\mathrm{K_L}, \mathrm{K_S}$ のビームが 1 本ずつできる．このさらに下流に測定器を置き，$\mathrm{K_L}$ と $\mathrm{K_S}$ の崩壊を同時に見る．$\mathrm{K_L}$ と $\mathrm{K_S}$ の区別は解析の段階でどちらのビームから来たかをみて行うが，測定器自身は両方のビームからの崩壊を同じように受け入れるので，各種の変動効果は $\mathrm{K_L}$ と $\mathrm{K_S}$ の比をとった段階で相殺する．偶発的な偽信号もまた二つのビームからの崩壊を区別しないので，その効果も相殺する．観測される K の平均エネルギーは約 70 GeV である．

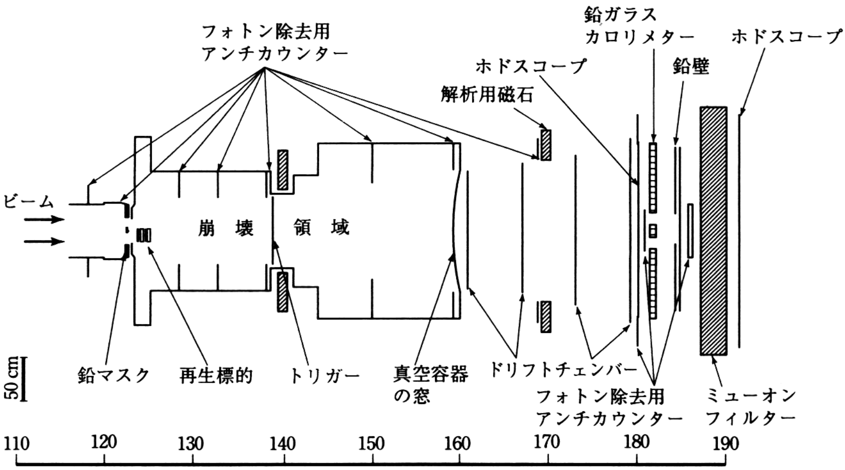


図 11.9　*CP* の破れを検証する E731 の実験装置[24] (縦横のスケール比が違うことに注意)
左方から 2 本の K^0_L ビームが入ってきて，一方は再生標的で K_S をつくる．$K_L, K_S \to 2\pi$ の崩壊は崩壊領域 (decay volume) で発生する．荷電粒子 $\pi^\pm$ は，解析用電磁石の前後に置いたドリフトチェンバーで軌跡を測定し，方向と運動量を決める．中性の $\pi^0 \to 2\gamma$ は鉛ガラスカロリメターで入射点とエネルギーを測定する．カロリメターにはビームを通すため 2 個の穴が開いている．ミューオン ($\pi \to \mu\nu, K_L \to \pi\mu\nu$) はミューオンフィルターを通してホドスコープで同定する．バックグラウンドを減らすためあちこちにアンチカウンター (PHOTON VETO) を置く．

b.　$\pi^+\pi^-$ の検出

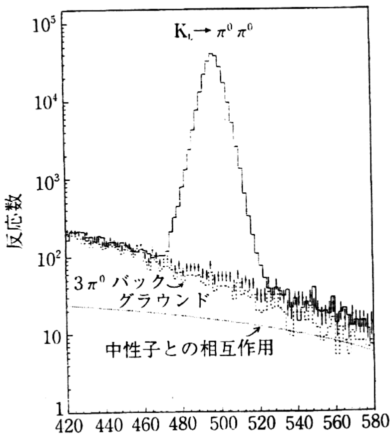
$\pi^+\pi^-$ への崩壊は，4 枚のドリフトチェンバーを磁石の前後方に置いて，π の運動方向と運動量を測定し，2 個の π の不変質量 (式 (11.30)) を再現する．方法は *CP* の破れを最初に発見した BNL 実験[4] と同様であるが，位置測定精度は約 100 ミクロンを実現しているので，質量分解能は，$\delta m_K = 3.5$ MeV/c^2 と格段によい．質量範囲 $484 < m_K < 512$ MeV/c^2 に入る事象の中には，偽信号 (バックグラウンド) が存在するが，K_S の場合は，K の方向に対する 2π 系の横運動量 $p_T{}^2$ 分布をみれば (図 11.4 には NA 31 の例を示したが E 731 も同様)，信号 ($p_T{}^2=0$ のコヒーレント散乱の寄与) とバックグラウンド (回折散乱や非弾性散乱の寄与) ははっきりと分かれ，バックグラウンドの寄与は 0.150 ± 0.011 % である．$K_L \to \pi^+\pi^-$ モード検出の場合のバックグラウンドは，主として $K_L \to \pi^\pm e^\mp \nu$ の電子を π と誤認することから生じ，その大きさは，$p_T{}^2$ の分布から 0.339 ± 0.015 % である．

c.　$\pi^0\pi^0$ の検出

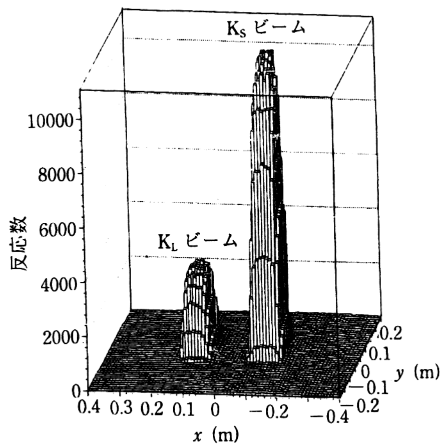
$\pi^0\pi^0$ の崩壊は，出てくる 4 個の γ を鉛ガラスのカロリメーターを用いて，カロリメーターへの入射場所とエネルギーを測定する．γ に対するエネルギー分解能は，$2.5+5/\sqrt{E}$ (GeV)% であり，場所の測定精度は約 2～3 mm である．π のエネルギーが大きいので 2 個の崩壊 γ は，たいてい前方に放出される．崩壊点とカロリメーターまでの距離を z とするとき，π の質量は

$$m_\pi{}^2=(E_1+E_2)^2-(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)^2=2E_1E_2(1-\cos\theta)\approx E_1E_2\cdot r^2/z^2 \quad (11.101)$$

で与えられる．ここで，E_1, E_2 は二つの γ のエネルギー，r はカロリメーター位置で測定した 2 個の γ 間の距離である．4 個の γ から 2 個の π^0 を組む組み方は，${}_4C_2/2=3$ 通りあるので，それぞれの γ 対について π^0 の質量を仮定して上の式から崩壊点を求め，二つの π^0 の崩壊点の最も近いものを正しい組み合わせと見なす．こうして崩壊点までの距離 z が求められたところで，$\pi^0\pi^0$ の質量を組み直し K であることを確認する．図 11.10 (a) に $K_L\to\pi^0\pi^0$ の質量分布を示す．質量分解能は，約 5 MeV/c^2 である．山の下の平らなバッ



(a)



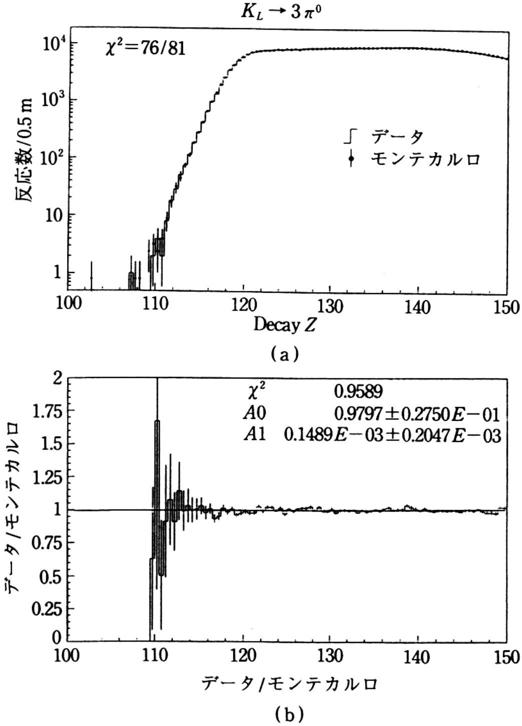
(b)

図 11.10　E731 実験での $K_L, K_S\to\pi^0\pi^0$ 再現図[24)]

(a)　$\pi^0\pi^0$ の質量分布．バックグラウンドは，$K_L\to 3\pi^0$ からのものと中性子の相互作用から生じるものとがある．

(b)　4 個のガンマの鉛ガラスカロリメーター面でのエネルギー重心分布のレゴプロット．$K_L\to\pi^0\pi^0$ と $K_S\to\pi^0\pi^0$ が明瞭に分離している．裾野は回折散乱，非弾性散乱による K_S 生成のバックグラウンドである．

クグラウンドは，$K_L \to \pi^0\pi^0\pi^0 \to 6\gamma$ のうち，2個の γ が検出されないとき，あるいは何らかの理由で捨てざるをえないときの事象である．この $3\pi^0$ によるバックグラウンドの大きさは 0.47 ± 0.03 % である．K_S の場合は，$3\pi^0$ からのバックグラウンドはほとんどない．ここで，鉛ガラスでの4個の γ のエネルギー重心（Kの方向をカロリメターまで外挿した点に同じ）をみれば，図11.10 (b) に示すように，二つのビームが明瞭に見えるので，K_L, K_S の区別は容易につく．再生標的からの回折散乱，非弾性散乱によるバックグラウンドは，二つの山の裾を差し引いて除くことができる．K_L (K_S) に対するこのバックグラウンドは，4.27 ± 0.05 %（2.55 ± 0.07 %）である．



(a)

(b)

図 11.11 $K_L^0 \to 3\pi^0$ の崩壊点 (z) 分布[24)]

(a) ヒストグラムはデータ，黒丸がモンテカルロ

(b) データとモンテカルロの比

モンテカルロが較正データ ($K_L^0 \to 3\pi^0$, $\pi e\nu$ など) の種々の分布を正しく再現していることにより，測定器の検出効率を正しく評価していることがわかる．

d. $\mathrm{Re}(\varepsilon'/\varepsilon_0)$ の抽出

こうして求めた4種類の崩壊モードの事象数を求めるには，Kのエネルギー，崩壊場所による検出効率の依存性を考慮して補正を加える必要がある．この補正量はモンテカルロシミュレーションを用いて，エネルギー，場所の関数として求める．最終的にはこのモンテカルロシミュレーションと較正データとの差が系統誤差として残るので，検出効率がエネルギー，場所の関数として滑らかで急激な変化のない関数であること，K_L と K_S とで異なる場所分布（K_L はほとんど一様であるのに反し，K_S は約 2 m で半減する）が較正データと一致することなどは特に重要である．較正データとしては，$K_L \to 3\pi^0$ や $K_L \to \pi e\nu$ などを用い，数々の分布がデータとモンテカルロで一致することを確かめる．図 11.11 はその一例で，$K_L \to 3\pi^0$ の崩壊場所分布がよく再現されていることがわかる．さらに同じデータを用いて，K_S の崩壊寿命，K_L と K_S との質量差，η_{+-} と η_{00} の位相の差などを測定し，現在知られている値と食い違わないことを確かめる．また，再生標的の入ったビームからの崩壊には K_L が K_S になって崩壊する成分（ρ），K_L のままで再生標的を突き抜けて K_L として崩壊する成分（η）があり，観測者にはその区別はできないので，事象数は両者の振幅を足してから2乗したものに比例する（式 (11.50) 参照）．この数は ρ/η の関数となるので，$\pi^+\pi^-$ と $\pi^0\pi^0$ のおのおのについて求め両者の比をとると ρ は消えて最終的な2重分岐比を得ることができる．

現在のところ，

$$\mathrm{Re}(\varepsilon'/\varepsilon_0)=7.4\pm6\times10^{-4} \qquad \text{E 731}^{14)} \qquad (11.102\,\mathrm{a})$$

$$\mathrm{Re}(\varepsilon'/\varepsilon_0)=23.0\pm7\times10^{-4} \qquad \text{NA 31}^{15)} \qquad (11.102\,\mathrm{b})$$

と，E 731 はゼロと矛盾しない結果をだしているのに対し，NA 31 はゼロから 3σ 離れた結果をだしていて，直接的な CP の破れの有無はまだ確認されていない．両者とも，測定器をさらに改良して四つの崩壊モードを同時観測し，さらに統計量を上げて，$\mathrm{Re}(\varepsilon'/\varepsilon_0)\sim1-2\times10^{-4}$ の精度で測定する実験を準備中である．

11.6 CP 非保存のモデル

CPT を破る強い相互作用の相対的な強さは (11.98 c) から，$\lesssim 10^{-18}$ と結論できる．電磁相互作用の場合の CPT 非保存成分は，これを α で割って $<10^{-16}$，弱い相互作用の場合は $G_F m_K{}^2$ で割って $<10^{-14}$ が上限を与える．この値は他のいかなる CPT 実験による値よりもよい．電磁相互作用に関しては，磁気能率の g 因子 $(g(e^+)-g(e^-))/g=-0.5\pm2.1\times10^{-12}$，$(g(\mu^+)-g(\mu^-))/g=-2.6\pm1.6\times10^{-8}$ による値があるが[7]，他はおおむね$\sim10^{-3}$程度の上限を与えるにすぎない．いずれにせよ，CPT は非常に良い精度で成立しているので，以下の議論では CPT 保存を仮定する．CP を破る（以下 $\not{C}\not{P}$ のように記す）原因をどこに求めるかによりモデルを次のように分類できる．

a. 強い相互作用

これは，$\not{C}\not{P}$ が次の 2 段階で起こるとするものである．まず，K_L が CP を保存する反応で X に壊れ，この X が強い力で 2π に遷移するとする．$X\to2\pi$ 遷移の強さを f とすれば，$|\eta|\sim10^{-3}$ を説明するためには，f もまた$\sim10^{-3}$の大きさとなるので，これは，ミリストロングの力と呼ばれる．CPT 保存は仮定しているからこの相互作用は次の 4 通りのどれかである．

(1) $P, \not{C}, \not{T}$ (2) $\not{P}, \not{C}, T$ (3) $\not{P}, C, \not{T}$ (4) $\not{P}, \not{C}, \not{T}$

原子の電磁遷移で異なったパリティ成分が少量が含まれていると，主成分との干渉により偏光がわずかに回転する．このわずかの偏光 $(\sim10^{-6})$ は実際に検出されているが，弱い相互作用の中性カレントによる効果の期待値ときわめてよく一致している．これらの実験から，P の破れが原因の (2), (3), (4) は除外される[26]．

原理的にミリストロングの可能性は残っているが，標準理論である QCD に自然に組み込むうまい方法がないので真剣には考えられないようである．

b. 電磁相互作用

電磁相互作用が原因の場合は，α がすでにこの程度の大きさであるから観測データを説明するためには，最高限度に保存則が破れていなければならない．しかし，η メソンの崩壊 $\eta^0\to\pi^+\pi^-\pi^0$，$\pi^+\pi^-\gamma$ での非対称が，それぞれ，0.9

$\pm 1.7\times 10^{-3}$, $9\pm 4\times 10^{-3}$ と測定されたので[7]，電磁相互作用での C の破れは仮にあったとしても小さい．P を破る成分は (1) の議論により標準理論の範囲以上には存在しない．したがって電磁相互作用が CP の破れの原因である可能性は除外される．

c．超弱相互作用 (superweak model)[27]

$\Delta S=2$ の相互作用 H_{SW} が存在し，これが CP 非保存の原因とする．質量行列 $\widetilde{M}_{12}$ に CP を破る項 $(\langle K^0|H_{SW}|\overline{K}^0\rangle)$ が現れる．H_{SW} のエルミート性から CP を破る部分に対しては，$\widetilde{M}_{12}=\widetilde{M}_{21}{}^*$ なので，(11.37) から

$$\varepsilon=\frac{\widetilde{M}_{12}-\widetilde{M}_{21}}{2\Delta}=\frac{-\mathrm{Im}\langle K^0|H_{SW}|\overline{K}^0\rangle}{(\Gamma_S-\Gamma_L)/2-i\Delta m} \qquad (11.103)$$

したがって，$\phi_\varepsilon=\phi_{SW}=\tan^{-1}(2\Delta m/\Gamma_S)$ が厳密に成立する (厳密にはここの議論だけからは $+\pi$ も可能であるが，実験的に除外されている)．超弱力の強さを $\sim fG_F$ とすれば，$f\sim\varepsilon\Delta m/G_F m_K{}^3\sim 10^{-11}$ 程度となる．この効果は質量行列にのみ現れ崩壊振幅にはでないので，$\varepsilon'=0$，したがって，

$$|\eta_{+-}|=|\eta_{00}|, \qquad \phi_{+-}=\phi_{00}=\phi_\varepsilon=\phi_{SW} \qquad (11.104)$$

が正確に成立する．いまのところ実験との一致はきわめてよい．このモデルでは，CP 非保存の効果はすべて唯一つのパラメター ε で表され，また中性K中間子以外には現れない．

d．ミリウィーク (Milliweak) 相互作用

CP の破れは $\Delta S=1$ の相互作用を通じて起きるとする．その強さは$\sim 10^{-3}$である．ヒッグスの数を増やして複素数の位相を持ち込むモデル，パリティの破れを自発的であるとする左右対称モデルなどがあるが，最も代表的なのは小林-益川モデルである．このモデルは標準理論の枠内で扱えるので，最も人気が高い．小林-益川理論については別のところで改めて議論する．

参考文献

1) E.P.Wigner and V.F. Weisskopf : *Z. Phys*., **63** (1930) 54, **65** (1930) 18
2) NA31 ; H. Burkhardt et al. : *Phys. Lett*., **B206** (1988) 169
3) 散乱中心による屈折率の公式は例えば，M.L. Goldberger and K.M. Watson : Collision Theory, J. Wiley, New York, (1964) pp. 771

4) J.H. Christenson, J. Cronin, V. Fitch, R. Turlay : *Phys. Rev. Lett.*, **13** (1964) 138
5) Gaillard *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **18** (1967) 20
Cronin *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **18** (1967) 25
6) CPLEAR ; R. Adler *et al.* : *Phys. Lett.*, **B286** (1992) 180
P.B. Renton : Talk at Int. Conf. Lepton and Photon at Beijing, 1995
7) PDG ; Review of Particle Properties, *Phys. Rev.*, **D50** (1994), **D54** (1996)
8) NA31 ; R. Carosi *et al.* : *phys. Lett*, **B237** (1990) 303
9) E731 ; M. Karlsson *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 2976
10) E773 ; B. Schwingenheuer *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 4376
11) S. Gjesdal *et al.* : *Phys. Lett.*, **B53** (1974) 113
12) T.J. Devlin and J.O. Dickey : *Rev. Mod. Phys.*, **51** (1979) 237
J. Gasser and U.G. Meissner : *Phys. Lett.*, **B258** (1991) 219
A. Shenk : *Nucl. Phys.*, **B363** (1991) 97
13) Wu-Yang : *Phys. Rev. Lett.*, **13** (1964) 36
14) E731 ; J.R. Patterson *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 1491
E731 ; L.K. Gibbons *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 1199, 1203
15) NA31 ; H. Burkhardt *et al.* : *Phys. Lett.*, **B206** (1988) 169
NA31 ; A.C. Schaffer *et al.* : DPF91, Proc. APS Annual Meeting, Vancouver, Aug. 1991
16) V.V. Barmin *et al.* : *Nucl. Phys.*, **B247** (1984) 293
C.O. Dib and R.D. Peccei : *Phys. Rev.*, **D46** (1992) 2265
L. Maiani : LNF-92/043 (P), 1992
17) Physics and Detector at a ϕ-Factory ed., T. Ohshima : in Sup. Prog. Theor. Phys. # 119 (1995)
18) C.O. Dib and B. Guberini : *Phys. Lett.*, **B255** (1991) 113
M. Luke : *Phys. Lett.*, **B256** (1991) 265
19) P. Franzini : Talk at Int. Conf. Lepton and Photon, Beijing, 1995
20) E773 ; R. Schwingenheuer *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 4376
21) S.W. Hawking : *Phys. Rev.*, **D14** (1975) 2460, *Commun. Math. Phys.*, **87** (1982) 395
22) J. Ellis, N.E. Mavromatos and D.V. Nanopoulos : *Phys. Lett.*, **B293** (1992) 142
J. Ellis, J.L. Lopez, N.E. Mavromatos and D.V. Nanopoulos : *Phys. Rev.*, **D53** (1996) 3846.
See also P. Huet and M. Peskin : *Nucl. Phys.*, **B434** (1995) 3
23) CPLEAR Collaboration, J. Ellis, J.L. Lopez, N.E. Mavromatos, and D.V. Nanopoulos : *Phys. Lett.*, **B364** (1995) 239
24) E731 ; J.R. Patterson *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 1491
M. Woods *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988) 1695
25) NA31 ; H. Burkhardt *et al.* : *Nucl. Instr. Methods*, **A268** (1988) 116
26) E.M. Henley : *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **19** (1969) 367
27) L. Wolfenstein : *Phys. Rev. Lett.*, **13** (1964) 562

12
核子の内部構造

12.1 歴史的展望

われわれはハドロンのスペクトロスコピーから，クォークモデルを導き出すのに成功した．しかし，クォークモデルの告げるところは，ハドロンの静的な性質すなわち質量，電荷，スピン，磁気能率およびアイソスピンやストレンジネスなどの外から測れる量についてはよく再現できるということであって，ハドロンの中の構造たとえば，ハドロンは本当にクォークより構成されているのか，クォークは本当に半端電荷をもつのかといったことはわからない．ハドロンの内部構造を解明するにはハドロンの中を探る探索子 (Probe；プローブ) を必要とする．プローブのもつべき条件としては，それ自体の性質はよくわかっていること，調べるべきハドロンより小さいサイズをもつこと，ハドロンの奥深く入っていけることなどであり，この観点からレプトンが有用である．この状況は今世紀はじめ原子の性質を説明する原子模型がいくつか存在したときに，プローブとして α 線が使われ，白金との散乱パターンを調べることによって原子のラザフォード模型が選択された状況になぞらえることができる．

1960 年頃の素粒子論界は混乱状況にあった．強い相互作用理論構成においては場の理論に対する信頼が失われ，散乱行列の解析性に基づく素粒子の民主主義論 (基本粒子なるものは存在せず，すべての粒子は平等であり，互いに他の粒子の構成要素となっているという靴紐の理論) が幅をきかせていた．その要因の一つにホフシュタッターらの一連の電子・陽子弾性散乱実験がある．この実験データによれば，核子は芯をもたず，雲もしくはゼリーのようにふわふわしている構造を示し，核子を構成する基本粒子の存在を主張する論拠は薄

かった．50年前と違い今度はトムソン的視点がラザフォード的視点より勝っているように見えたのである．基本粒子の存在を否定する実験事実に加えて，半端電荷というクォークのもつ異常性質は，当時の研究者にとっては常識的に受け入れがたいものであった．提唱者のゲルマンですら，クォークは物理的実体ではなく分類学として便利な数学的手段と考えるべきであるとしばらくは言っていたほどなのである．この状況に大きな転機を与えたのが1969年のMIT-SLACの電子陽子の深非弾性散乱であった．実際，核子が点粒子の集合体であるというパートン構造をはじめて明らかにしたということで，これは現代のラザフォード散乱といってよい（著者がちょうどこの部分を執筆中に，1990年のノーベル物理学賞が上記グループのフリードマン（Friedman），ケンドール（Kendall），テイラー（Tayler）に授与されたとの報道があった）．

MIT-SLACに始まる一連の実験により，核子がクォークの複合体であることが明らかにされ，クォーク同士の相互作用を記述するQCD理論が確立した．電弱相互作用を記述するGWS理論と合わせて今日の標準理論の一翼を荷っている．

この章は，核子が質点粒子（パートン）からなる複合体であること，このパートンがクォークおよびグルーオンであることを突き止めるにあたって，電子およびニュートリノ深非弾性散乱が演じた役割について述べるものである．

12.2 核子の広がり

12.2.1 形状因子 (form factor)

電子をプローブとして扱うためには電子と他の基本粒子との反応式を正確に知っておく必要がある．その基本となるのが，第5章「QED」で導いたラザフォード散乱公式（5.25）である．

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left|\frac{m}{2\pi}V_{fi}\right|^2=\left|\frac{m}{2\pi}\int V(r)e^{+iQ\cdot r}dr\right|^2=\frac{4Z^2\alpha^2m^2}{Q^4}\equiv\sigma_{pt} \qquad (12.1)$$

m：標的粒子の質量，Z：標的粒子のもつ電荷

$$V(r)=\frac{Ze^2}{4\pi r}=\frac{Z\alpha}{r} \qquad (12.2)$$

$$Q^2=|\boldsymbol{Q}|^2=|\boldsymbol{k}_{\rm i}-\boldsymbol{k}_{\rm f}|^2=4k^2\sin^2\frac{\theta}{2} \qquad (12.3)$$

k：電子の運動量，　θ：電子の散乱角

$\boldsymbol{Q}$ は，電子が標的に与えた運動量つまり衝撃の強さであり，遷移運動量と呼ばれる．(12.1) は標的が点粒子のときに成立する．もし標的が広がっていて，$\rho(\boldsymbol{r})$ という分布をもっているとすると，ポテンシャルは

$$V(\boldsymbol{r}) \longrightarrow V'(\boldsymbol{r})=\int V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

となるので，行列要素は

$$\begin{aligned} V_{\rm fi} \longrightarrow V_{\rm fi}' &= \int V'(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{+i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \left[\int V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{+i\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right]\times\int\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\ &= V_{\rm fi}F(Q^2) \end{aligned} \qquad (12.4)$$

となる．$F(Q^2)$ は，

$$F(Q^2)=\int\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \qquad (12.5)$$

で定義される．標的の広がり分布を表す量であり形状因子 (form factor) と呼ばれる．

$$\int\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=1 \qquad (12.6)$$

で規格化すれば

$$F(0)=1 \qquad (12.7)$$

これより広がりをもつ粒子からの散乱断面積は，点粒子からの散乱断面積 $\sigma_{\rm pt}$ に比べて，

$$\mathrm{d}\sigma(\theta)=\mathrm{d}\sigma_{\rm pt}(\theta)|F(Q^2)|^2 \qquad (12.8)$$

と変更されることがわかる．したがって，散乱断面積の測定をすれば，点標的の散乱断面積がわかっているときには標的の広がりの情報が得られることになる．(12.5) の表式からわかるように，$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r}\gg 1$ のところは，$\exp(i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r})$ の振動が激しく積分に寄与しない．したがって (12.5) は，$r\lesssim 1/Q$ のみの範囲について積分した全電荷量をみていること，つまり中心から $r\simeq 1/Q$ の距離にまで電子が侵入したことを意味する．

a. 標的のサイズ

分布が球対称とすると，$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r}\ll 1$ のときは $\exp(i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r})$ を展開して，

$$F(Q^2)=\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})[1+(i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r})-(1/2)(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r})^2+\cdots\cdots]$$

$$=1-\frac{Q^2}{6}\langle r^2\rangle+\cdots\cdots \tag{12.9}$$

$$\langle r^2\rangle=\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{r}|^2 \tag{12.10}$$

$$\therefore\quad \langle r^2\rangle=-6\frac{\mathrm{d}F(Q^2)}{\mathrm{d}Q^2} \tag{12.11}$$

つまり $|Q|$ の小さい測定値しか得られないときは，全電荷 $(Z\alpha)$ と広がりのサイズ $\langle r^2\rangle$ くらいしかわからないことになる．$|Q|$ の大きいほど，すなわち大エネルギー，大散乱角になるほど深部構造が見えることになる．

b. 各種の形状因子

ある空間分布に対し形状因子がどのような形になるかを知っておくと，形状因子のもつ物理的意味を理解しやすいので，2〜3 の代表例について調べておこう．

例 1 球状分布：$\rho=\rho_0; r\leqq R$，$\rho=0; r>R$ のとき（図 12.1 (a)）

$$F(Q^2)=\frac{3(\sin\xi-\xi\cos\xi)}{\xi^3},\qquad \xi=QR \tag{12.12}$$

これはピンホールを通った光が，背後の壁面にリング状の明暗の縞をつくるのと同様な強弱のパターンを示す（図12.1 (b)）．通常回折パターン（diffrac-

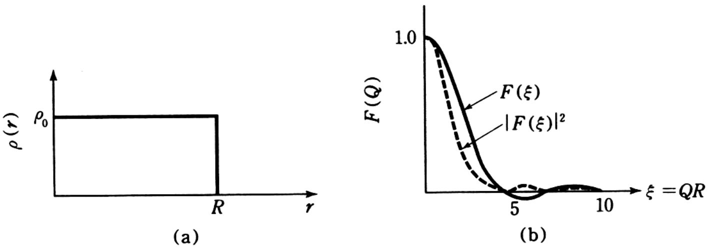


図 12.1 形状因子の例

(a) $\rho(r)=\rho_0$, $r\leqq R$, $\rho(r)=0$, $r>R$

(b) $F(\xi)=\dfrac{3(\sin\xi-\xi\cos\xi)}{\xi^3}$, $\xi=QR$

電荷分布に明瞭な境界があるときは，形状因子 $F(\xi)$ は回折パターンを示す．

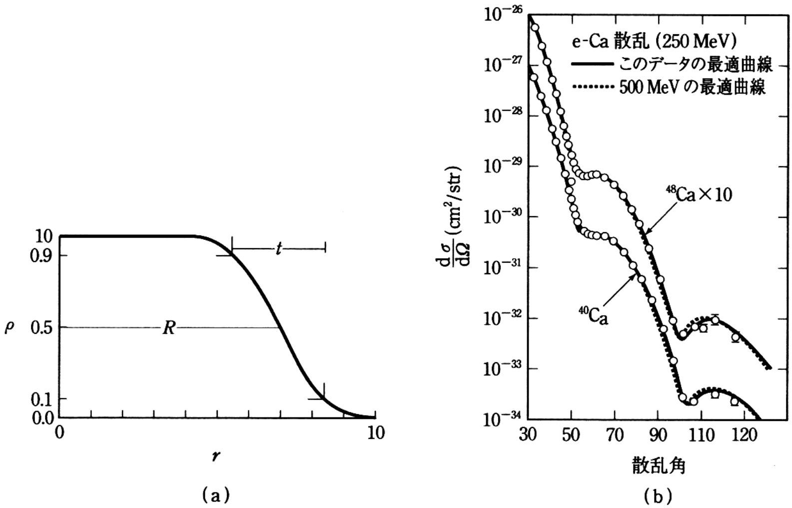


図 12.2 境界がぼけると鋭い谷が滑らかになる[1)]

(a) $\rho(r)=\dfrac{\rho_0}{1+e^{(r-R)/a}}$, $t=(4\ln 3)a$

(b) 電子原子核散乱を (a) 式を用いて最適化したもの．$R=r_0A^{1/3}$, $r_0=1.12\times10^{-13}$cm, $t=2.4\times10^{-13}$cm

tion pattern) と呼ばれる．境界がはっきりしたところの後ろに波が回り込むときに共通して現れるパターンである．

例 2 原子核は電子からは，半径 $R=A^{1/3}r_0$ の大きさのぼんやりした球状に見える．図 12.2 (b) に 250 MeV の電子をカルシウムに当てたときのデータが示してある．回折パターンと似ているが，より滑らかな曲線となっている．このデータを再現する電荷分布

$$\rho=\frac{N}{1+\exp((r-R)/a)} \tag{12.13}$$

を図 12.2 (a) に示す．R が原子核の大きさを表し，$t=(4\ln 3)a$ が表面の厚さつまり境界のぼけ具合を表す．表面がぼけると回折パターンの谷が埋まってくることがわかる．データに合うように諸パラメターを決めると，$r_0=1.12\times10^{-13}$ cm, $t=2.4\times10^{-13}$ cm となる[1)]．

例 3 指数関数分布

$$\rho=\rho_0\exp(-r/a) \tag{12.14 a}$$

$$F(Q^2)=1/(1+Q^2a^2)^2 \tag{12.14 b}$$

例 4　ガウス分布：

$$\rho=\rho_0\exp(-r^2/b^2) \tag{12.15 a}$$

$$F(Q^2)=\exp(-Q^2b^2/4) \tag{12.15 b}$$

演習 12.1　(12.12), (12.14 b) を導け.

12.2.2　電子と核子の弾性散乱

a.　核子の電磁形状因子

陽子はスピン 1/2 をもち，広がった構造をもつ．もし点粒子つまりディラック粒子であるならば，電子（質量は 0 とする）との弾性散乱

$$e(\omega;\boldsymbol{k})+p(E;\boldsymbol{p})\rightarrow e(\omega';\boldsymbol{k}')+p(E';\boldsymbol{p}')$$

の断面積は第 5 章 (5.80) で計算した eμ 散乱断面積から，質量のみを陽子質量 M に置き換えた，

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{LAB}}=\frac{4\alpha^2}{q^4}\frac{\omega'^3}{\omega}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1-\frac{q^2}{2M^2}\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\equiv\sigma_{\mathrm{M}}\frac{\omega'}{\omega}\left[1-\frac{q^2}{2M^2}\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{12.16}$$

$$q^2=-Q^2=(k-k')^2=-2\omega\omega'(1-\cos\theta) \tag{12.17 a}$$

$$\sigma_{\mathrm{M}}=\sigma_{\mathrm{MOT}}\equiv\frac{4\alpha^2}{Q^4}\omega'^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{12.17 b}$$

で与えられるはずである．σ_{M} はモット一散乱断面積である．第 1 項がクーロン散乱による項で，第 2 項が陽子の磁気能率による散乱である．広がり効果を入れる場合，電荷の分布と磁気能率の分布は一般に違うので対応する形状因子にも 2 種類あるであろう．形状因子がどのような形で入るかをみるため，陽子の運動により誘起される電流を，

$$eJ_{\mathrm{p}}{}^{\mu}(x)=e\langle p'|J^{\mu}(x)|p\rangle$$

$$=e\bar{u}(p')\left[F_1(q^2)\gamma^{\mu}-\frac{\chi}{2M}F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}\right]u(p)\mathrm{e}^{iqx} \tag{12.18}$$

と書く．ローレンツ不変性だけの議論からはこのほかに $q^{\mu}=(p'-p)^{\mu}$, $(p'+p)^{\mu}$ に比例する項があってもよいが，電流の保存則 $\partial_{\mu}J_{\mathrm{p}}{}^{\mu}=0$ とディラック方程式の平面波解に対する条件を使えば，上の式でつきていることが証明できる

(演習 12.2). ここで, 形状因子の変数 $Q^2=-q^2$ に対して, 非相対論で定義した場合と同じく運動量遷移という言葉を使うが, Q^2 は相対論的な量であって標的の反跳効果を含むことに注意しよう. したがって, 静的な電荷分布のフーリエ変換という $F(Q^2)$ の物理的描像は厳密には成立しなくなるが, 運動量が小さい非相対論的近似では依然として有効である.

演習 12.2 (12.18) の中で $q^\mu=(p'-p)^\mu$ に比例する項は電荷の保存則により禁止されること, $(p'+p)^\mu$ に比例する項はディラック方程式によって (12.18) にすでにある項と独立でないことを証明せよ. 特に

$$\gamma^\mu=\frac{(p'+p)^\mu}{2M}-\frac{i}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu$$

(ゴルドン (Gordon) の等式という) となることを証明せよ. 次に (12.18) を,

$$eJ_{\mathrm{p}}{}^\mu(x)=e\bar{u}(p')\left[F_1(q^2)\frac{(p'+p)^\mu}{2M}-\frac{F_1(q^2)+\chi F_2(q^2)}{2M}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]u(p)\mathrm{e}^{iqx} \quad (12.19\,\mathrm{a})$$

と書き換え, 非相対論極限 $(p'^\mu,\ p^\mu\to(M;M\boldsymbol{v}))$ のとき, $q^2\to 0$ であるから, $F_1(0)=1$, $F_2(0)=1$ であれば

$$eJ_{\mathrm{p}}{}^\mu A_\mu \longrightarrow e(\phi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})+(1+\chi)\frac{e}{2M}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \quad (12.19\,\mathrm{b})$$

となることを示せ. このことは, (12.18) の第 1 項は, クーロン相互作用のほかにディラック磁気相互作用を含むが, 異常磁気能率効果は第 2 項に入っていることを示す.

陽子は電荷 e, 磁気能率 $\mu_{\mathrm{p}}=(1+\chi_{\mathrm{p}})(e/2M)$ をもつので,

$$F_1(0)=1,\quad F_2(0)=1;\qquad \chi=\chi_{\mathrm{p}} \quad (12.20)$$

同様に中性子は, 内部の電荷分布はどうかわからないが, 全体としては 0 であるので,

$$F_1(0)=0,\quad F_2(0)=1;\qquad \chi=\chi_{\mathrm{n}} \quad (12.21)$$

ただし,

$$\chi_{\mathrm{p}}=1.79,\qquad \chi_{\mathrm{n}}=-1.91 \quad (12.22)$$

b. ローゼンブラスの公式

陽子のつくる電流 (12.18) および電子のつくる電流

$$qj_{\mathrm{e}}{}^\mu(x)=-e\langle k'|j^\mu(x)|k\rangle=-e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\mathrm{e}^{-iqx} \quad (12.23\,\mathrm{a})$$

$$q=k-k' \quad (12.23\,\mathrm{b})$$

を用いれば, 電子陽子弾性散乱の散乱振幅は, フォトンを 1 個交換するという

摂動の最低近似で

$$-iT_{\mathrm{fi}}=e^2\int j_{\mathrm{e}\mu}\left(\frac{-i}{q^2}\right)J_{\mathrm{p}}{}^{\mu}\mathrm{d}^4x \tag{12.24}$$

となり，断面積は，

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{LAB}}=\sigma_{\mathrm{M}}\frac{\omega'}{\omega}\left[\left(F_1{}^2-\frac{\chi^2q^2}{4M^2}F_2{}^2\right)-\frac{q^2}{2M^2}(F_1+\chi F_2)^2\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{12.25}$$

となる．

$$G_{\mathrm{E}}\equiv F_1+\frac{\chi q^2}{4M^2}F_2,\qquad G_{\mathrm{M}}\equiv F_1+\chi F_2 \tag{12.26}$$

を定義すると，(12.25) は

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{LAB}}=\sigma_{\mathrm{M}}\frac{\omega'}{\omega}\left[\frac{G_{\mathrm{E}}{}^2+\tau G_{\mathrm{M}}{}^2}{1+\tau}+2\tau G_{\mathrm{M}}{}^2\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{12.27}$$

$$\tau=\frac{Q^2}{4M^2}=-\frac{q^2}{4M^2} \tag{12.28}$$

$$Q^2=-(k-k')^2=4\omega\omega'\sin^2\frac{\theta}{2},\quad \omega'=\frac{\omega}{1+(\omega/M)(1-\cos\theta)} \tag{12.29}$$

となる，これをローゼンブラス (Rosenbluth) 公式と呼ぶ．$Q^2\to 0$ で，$G_{\mathrm{E}}\to 1$, $G_{\mathrm{M}}\to 1+\chi$ であるので，$G_{\mathrm{E}}(Q^2)$, $G_{\mathrm{M}}(Q^2)$ は，それぞれ電荷分布，磁気能率分布を表す量と考えてよい．初期の実験データは主としてスタンフォード大学および付属線形加速器センターの電子ビームによって得られた．断面積は

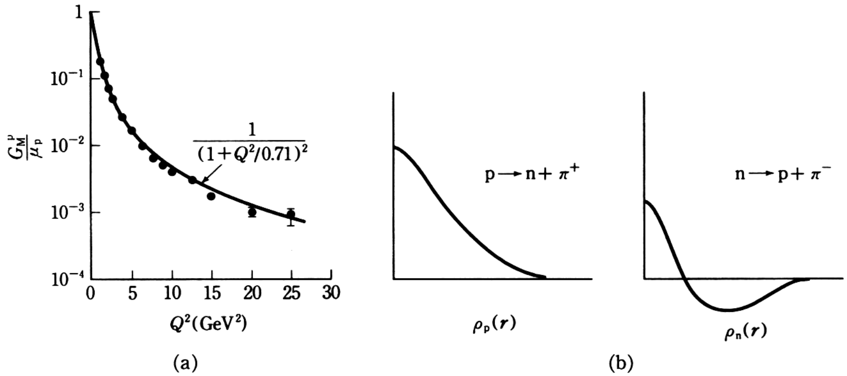


図 12.3　(a)　陽子の電子散乱形状因子データ[2)]

$$G_{\mathrm{E}}{}^{\mathrm{p}}=\frac{G_{\mathrm{M}}{}^{\mathrm{p}}}{\mu_{\mathrm{p}}}=\frac{G_{\mathrm{M}}{}^{\mathrm{n}}}{\mu_{\mathrm{n}}}=\frac{1}{(1+Q^2/0.71)^2},\qquad G_{\mathrm{E}}{}^{\mathrm{n}}=0$$

(b)　$\mathrm{p}\to\mathrm{n}+\pi^+$, $\mathrm{p}+\pi^0$, $\mathrm{n}\to\mathrm{p}+\pi^-$ としたときの電荷分布予想図．

$$\frac{1}{\sigma_M}\frac{d\sigma}{d\Omega}=A(Q^2)+B(Q^2)\tan^2(\theta/2) \tag{12.30}$$

の形をとるから，Q^2 を固定して θ を変えることにより，A と B したがって G_E, G_M を Q^2 の関数として別々に取り出せる．図 12.3 に結果を示すが[2)]，データは，$0 \leqq Q^2 \lesssim 30$ $(\mathrm{GeV/c})^2$ の範囲で

$$G_E{}^p=\frac{G_M{}^p}{\mu_p}=\frac{G_M{}^n}{\mu_n}=\frac{1}{(1+Q^2(\mathrm{GeV/c})^2/0.71)^2} \tag{12.31 a}$$

$$G_E{}^n(Q^2)=0 \tag{12.31 b}$$

という実験式によく合う．(12.14 b) と比較すれば，中性子の電荷分布は外から見ても中に入っても常に中性であること，他の分布は指数関数的で，外側から中心にかけて非常に滑らかに電荷や磁気能率が分布していることを表している．これは核子のサイズがだいたい

$$\sqrt{\langle r^2\rangle}\simeq 0.7\times 10^{-13}\,\mathrm{cm}\simeq(1/2m_\pi) \tag{12.32}$$

であることを示す．もし中心に芯があって電荷 λe をもっていたとすれば，形状因子は λ の値に漸近的に近づくはずであるが，データからみる限りそのような傾向はみられないので，陽子は電荷の分布に関する限り中心部まで柔らかいふわふわした状態であると解釈できる．

クォークモデルの出現以前は，核子は π の放出を繰り返し

$$\mathrm{p}\longrightarrow \mathrm{n}+\pi^+,\qquad \mathrm{n}\longrightarrow \mathrm{p}+\pi^- \tag{12.33}$$

により π の雲をまとうイメージで考えていた．この考えに従えば，例えば電荷の分布は図 12.3 (b) のように，陽子の場合は中心から滑らかに 0 に近づき，中性子の場合は，中心が陽に周辺で負に分布する描像が描ける．データはこれを支持しない．

12.3　電子・陽子の深非弾性散乱

12.3.1　断面積と構造関数

標的陽子が静止しているとき，2 体の準弾性散乱反応

$$\mathrm{e}(k)+\mathrm{p}(p)\longrightarrow \mathrm{e}(k')+X(p')\quad (\text{一般に } M_X\neq M)$$

では，入射電子のエネルギー ω を与えたとき，電子の散乱角 θ と電子の失う

エネルギー $\nu\equiv\omega-\omega'$ の間には1：1の関係があり，どちらかを測定すれば他方が定まる（演習12.3）.

演習 12.3　運動量とエネルギー保存則から，静止標的における ep 弾性散乱で入射電子のエネルギーを固定したとき，散乱角と散乱エネルギーの間には，$W=M_{\mathrm{X}}$ として

$$\nu\equiv\omega-\omega'=\frac{Q^2}{2M}+\frac{W^2-M^2}{2M} \tag{12.34}$$

特に弾性散乱（$W=M$）のときは

$$\nu=\frac{Q^2}{2M}=(\omega\omega'/M)(1-\cos\theta) \tag{12.35}$$

の関係が成立することを示せ．ただし，電子の質量は0とみなす．

非弾性散乱のときは $W(=M_{\mathrm{X}})$ は任意にとれるので，散乱電子の散乱角 θ とエネルギー ω' は独立変数となる．この場合，断面積は一般的に次の形に書くことができる．

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega'}=\sigma_{\mathrm{M}}[W_2(Q^2,\nu)+2W_1(Q^2,\nu)\tan^2(\theta/2)] \tag{12.36}$$

ここに，W_1, W_2 は構造関数と呼ばれ，弾性散乱における形状因子に相当する量である．弾性散乱の場合と違い Q^2, ν と2変数の関数である．(12.36) は，(12.24) から導くことができる．非弾性散乱の遷移振幅は

$$-iT_{\mathrm{fi}}=i(2\pi)^4e^2\delta^4(k+p-k'-P_{\mathrm{F}})j_{\mathrm{e}\mu}\frac{-1}{q^2}J_{\mathrm{p}}{}^{\mu} \tag{12.37}$$

$$j_{\mathrm{e}\mu}=\langle e(k')|\bar{e}\gamma_\mu e|e(k)\rangle,\qquad J_{\mathrm{p}}{}^{\mu}=\langle X|J_{\mathrm{EM}}{}^{\mu}(0)|p(p)\rangle \tag{12.38}$$

と書ける．$|X\rangle$ は，P_{F} をもつ任意の終状態である．したがって散乱の断面積は，

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{(4\pi\alpha)^2}{4(kp)}L_{\mu\nu}\frac{1}{Q^4}4\pi MW^{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \tag{12.39}$$

$$\begin{aligned}L_{\mu\nu}&=(1/2)\sum_{\text{スピン}}\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)\bar{u}(k)\gamma_\nu u(k')\\&=2[k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu+(q^2/2)g_{\mu\nu}]\end{aligned} \tag{12.40}$$

$$W^{\mu\nu}\equiv\frac{(2\pi)^4}{4\pi M}\sum_{\mathrm{F}}\delta^4(p+q-P_{\mathrm{F}})\left[\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{\text{スピン}}J_{\mathrm{p}}{}^{\mu}J_{\mathrm{p}}{}^{\nu *}\right] \tag{12.41}$$

J^μ はエルミートなので，

$$W^{\mu\nu}=W^{\nu\mu *} \tag{12.42}$$

また，陽子のスピンについては平均をとってしまっているので，$W^{\mu\nu}$ は q と p のみの関数であり，しかもローレンツテンソルである．したがって，$g^{\mu\nu}$, $q^\mu q^\nu$, $p^\mu p^\nu$, $p^\mu q^\nu$, $q^\mu p^\nu$, $i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho q_\sigma$ で展開できるが，カレント保存則 $\partial_\mu J^\mu \sim q_\mu J_{\mathrm{p}}{}^\mu=0$ より，

$$q_\mu W^{\mu\nu}=q_\nu W^{\mu\nu}=0 \tag{12.43 a}$$

という条件がつくので，

$$\left(-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right),\quad \left(p^\mu-\frac{(pq)q^\mu}{q^2}\right)\left(p^\nu-\frac{(pq)q^\nu}{q^2}\right),\quad i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho q_\sigma \tag{12.43 b}$$

が条件を満たす量となる．このうち，第3項は反対称テンソルであり最初の2項とは逆のパリティをもつ．電磁相互作用では，パリティが保存するのでこの項はない．実際に $L^{\mu\nu}$ に掛けてやれば0となることはすぐ証明できる．したがって，

$$W^{\mu\nu}=\left(-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)W_1(Q^2,\nu)$$
$$+\left(p^\mu-\frac{(pq)q^\mu}{q^2}\right)\left(p^\nu-\frac{(pq)q^\nu}{q^2}\right)\frac{W_2(Q^2,\nu)}{M^2} \tag{12.44}$$

とおいて W_1, W_2 を定義する．

$$q^\mu L_{\mu\nu}=q^\nu L_{\mu\nu}=0 \tag{12.45}$$

を使えば

$$L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}=4\omega\omega'\left[W_2\cos^2\frac{\theta}{2}+2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{12.46}$$

ゆえに (12.39) から次の式を得る．

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega'}=\frac{4\alpha^2}{Q^4}\omega'^2[W_2\cos^2(\theta/2)+2W_1\sin^2(\theta/2)]$$
$$=\sigma_{\mathrm{M}}[W_2+2W_1\tan^2(\theta/2)] \tag{12.47}$$

演習 12.4 (12.47) を証明せよ．

演習 12.5* 陽子を構造のないディラック粒子として，終状態が運動量 p' をもつ陽子とするとき（すなわち ep 弾性散乱のとき），(12.41) に $J_{\mathrm{p}}{}^\mu=e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)$ を代入し実際に計算するか，あるいは (12.27) と比較して

$$W_2(Q^2,\nu)=\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2M}\right) \tag{12.48 a}$$

$$W_1(Q^2,\nu)=\frac{Q^2}{4M^2}\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2M}\right) \tag{12.48 b}$$

を証明せよ．次に

$$\int\delta\left(\nu-\frac{Q^2}{2M}\right)d\omega'=\frac{\omega'}{\omega} \tag{12.49}$$

を示し，(12.47) に (12.48) を入れれば，(12.16) を再現することを確かめよ．

12.3.2 ブヨルケン・スケーリング

1969 年 MIT-SLAC グループは，電子を陽子標的に当て，散乱されて出てくる電子の頻度を測定した．入射エネルギー ω と散乱角 θ を固定して，微分断面積を W（または ω'）の関数として描くと図 12.4 のようになる[3]．

ここで左端の鋭い山は（1/8.5 スケールにしてある）弾性散乱，その右側につながる連続スペクトルが非弾性散乱であるが，非弾性散乱スペクトルの中にも幅の広い山がいくつか見えている．これはすでに習った πN 共鳴の N* であり，準 2 体反応

$$e+p \longrightarrow e+N^*$$

である．これら共鳴を取り除いたなだらかな丘状の連続スペクトル (continuum) が，たくさんの粒子が同時につくられる真の非弾性散乱である．これらのデータを Q^2 を変えてプロットすると図 12.5 (a) のようになる[4]．$W=M$（弾性散乱）のときの形状因子 $W_i(Q^2)$ は，すでに見たように Q^2 の関数として急激に減少しており，広がった構造体としての特徴を示す．$W=M(N^*)$

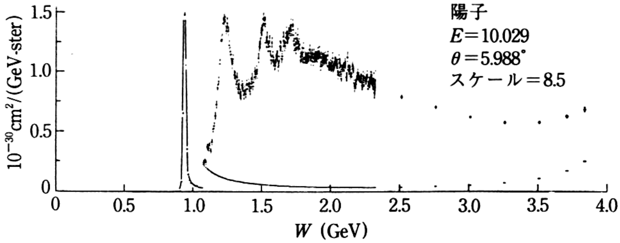


図 12.4

MIT-SLAC 電子深非弾性散乱断面積 $\frac{d^2\sigma}{d\Omega dW}$($E_e$=10 GeV，$\theta$=6°) を終状態のハドロンエネルギー W の関数としてプロットしたもの[3]．$W=M$ に相当する弾性散乱は 1/8.5 の大きさに縮めてある．また，放射補正による弾性散乱の裾の広がりを描いてある．

に相当する準弾性散乱も同じ振る舞いをする．しかし，連続部特に W の大きいところではほとんど減少せず $MW_1, \nu W_2$ は一定値に近づく（図 12.5 (b)）．この現象をブヨルケン (Bjorken) のスケーリングといい，ブヨルケンによって，理論的に予想されていたものである[5]．ブヨルケン・スケーリングとは

$$\omega \to \infty, \quad Q^2 \to \infty, \quad \nu \to \infty$$
$$0 < x = Q^2/2M\nu < 1 \tag{12.50}$$

のとき，

$$\nu W_2(Q^2, \nu) \longrightarrow F_2(x), \qquad MW_1(Q^2, \nu) \longrightarrow F_1(x) \tag{12.51}$$

のように，構造関数が Q^2 と ν の 2 変数に独立に依存するのでなく，その比のみの関数になるというものである*1)．これは，次のように考えることができる．$MW_1, \nu W_2$ は無次元の量であるから，無次元変数の関数である．スケーリング極限では，陽子質量などは無視できて有限な無次元変数は x のみとなるので，ブヨルケン・スケーリングが成立する．これが，構造のない質点粒子からの散乱を表すであろうことは，次の議論から類推できる．(12.27) と (12.36) を比較して (12.49) に着目すれば，有限サイズをもつ標的の構造関数は，

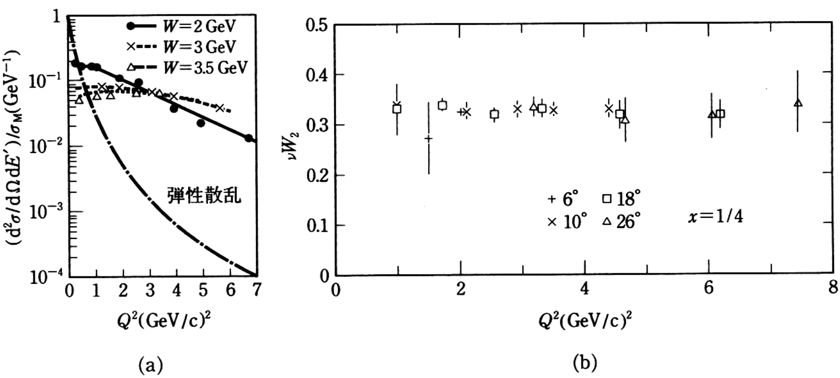


図 12.5

(a) 弾性散乱の断面積は $\sim 1/Q^4$ で減少するのに反し，図 12.4 の連続部に対応するところは減少しない[4]．

(b) $\nu W_2(\nu, Q^2)$ は Q^2 の関数として一定であり，$x = Q^2/2M\nu$ のみの関数となる．図は $W > 2$ GeV のデータを集めてある[3]．

---

*1) この F_1, F_2 は (12.18) の F_1, F_2 とは違う別の関数であることに注意せよ．

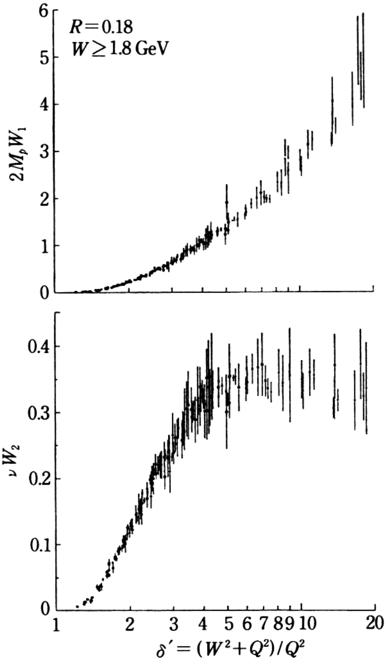


図 12.6　eP → e′ ＋ハドロン散乱の構造関数のスケーリング[3)]
(a) $2M_pW_1$，(b) νW_2 を $\delta=(W^2+Q^2)/Q^2$ の関数としてプロットしたもの．ν, Q^2 の2変数関数でなく，x のみの関数であるというブヨルケンのスケーリングが成立する．データはハドロンエネルギー $W>1.8\,\mathrm{GeV}$ を集めた（本文中の x とは $1/x=\delta-M_p^2/Q^2$ の関係にある．$1/x$ の代わりに δ を使ったのは，低エネルギーでの質量効果を考慮したものである）．

$$MW_1 \sim G^2(Q^2)\frac{Q^2}{2M\nu}\delta\left(1-\frac{Q^2}{2M\nu}\right) \tag{12.52 a}$$

$$\nu W_2 \sim G^2(Q^2)\delta\left(1-\frac{Q^2}{2M\nu}\right) \tag{12.52 b}$$

の形をしており，Q^2 の関数である形状因子 G を含む．G は実験的には，$m^2 \sim 0.71\mathrm{GeV}^2$ という質量因子を含むがこれは標的の大きさを表している．$Q^2 \to \infty$ で m が無視できるところでは $G \to 0$ となり，有限の大きさを保ったままの散乱は起きにくくバラバラに壊れる．一方点粒子標的の場合は，形状因子 G が定数となるから $x=Q^2/2M\nu$ だけの関数となる．結局ブヨルケン・スケーリング極限では，構造関数に寄与する核子内の諸構成要素のうち，点標的部分のみ生き残るということである．次節では，　パートンモデルを使いブヨルケ

ン・スケーリングを物理的に分かりやすいように再解釈するが，弾性散乱データから推定されていた核子の柔構造が，深非弾性散乱データによって再考を余儀なくされたのである．

12.4 パートンモデル

12.4.1 インパルス近似

核子は点状の粒子（パートン）の集合体であるとみなし，電子陽子散乱は，個々のパートンによる散乱の和で近似できると考えて式をつくってみよう（インパルス (impulse) 近似という）．

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{ep}}=\sum_i\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{eq}_i} \tag{12.53}$$

個々の散乱の和ということは各散乱が独立に起きるということであり，個々のパートン散乱は他のパートンに影響を及ぼさないということである．これが成立するためには，相互作用に要する時間 τ_{int} が，パートンが自由でいられる時間 τ_{free} に比べて十分短くなければならない．

$$\tau_{\mathrm{int}}\ll\tau_{\mathrm{free}} \tag{12.54}$$

パートンは核子の中にあるので，本当は他のパートンと束縛状態にあり，1つのパートンが動くと隣のパートンが引きずられて動く．動き出すのに要する時間は，束縛エネルギーの逆数の程度

$$\therefore\quad \tau_{\mathrm{free}}\simeq\frac{1}{\text{束縛エネルギー}}\simeq\frac{1}{E_{\mathrm{free}}-E_{\mathrm{tot}}} \tag{12.55 a}$$

である．束縛エネルギーはたかだか核子の質量程度 $(\sim M)$ と考えられる．これは相当に大きいエネルギーであるが，一定値をとりエネルギーとともに増えることはない．一方，電子から見たとき核子は高エネルギーで走っているので，本来のサイズ $(\simeq 1/m_\pi)$ に比べ，ローレンツ収縮により $1/\gamma\sim M/E$ だけ縮んで見える（図 12.7 (a)）．したがって反応時間 τ_{int} は

$$\therefore\quad \tau_{\mathrm{int}}\simeq\frac{1}{m_\pi}\frac{M}{E} \tag{12.55 b}$$

したがって十分高エネルギー $(E\gg M^2/m_\pi)$ であれば条件 (12.54) を満たす．以上の条件をパートンの変数で書き直してみよう．運動方向の運動量 $p_{/\!/}$ に比

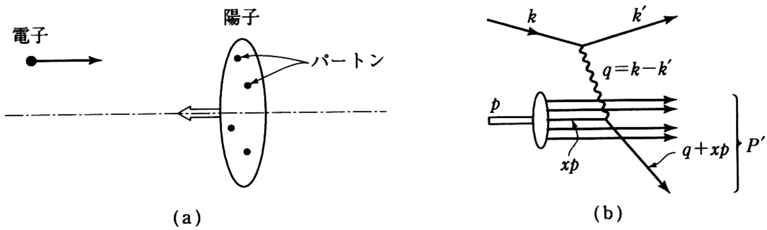


図 12.7

(a)　ローレンツ収縮によって陽子はパンケーキのように薄く見える．したがってパートンどうしが衝突する時間より電子が陽子を通り抜ける時間（電子とパートンの衝突時間）の方がはるかに短く，パートンは近似的に自由粒子と見なせる．

(b)　パートンの運動学．陽子の中の運動量 xp をもつパートンのみが電子と相互作用をし，他は素通りする．

べ横方向の運動量 $p_\perp$ は十分小さいから，核子の中の i 番目のパートンの運動量も $p_{i/\!/} \gg p_{i\perp} \simeq p_\perp$ である．衝突によりエネルギーがやり取りされ，核子が励起されて質量が M から W になったとすれば，エネルギー遷移 q_0 は，

$$1/\tau_{\mathrm{int}} \sim q_0 \sim \sqrt{p^2+W^2} - \sqrt{p^2+M^2} \sim \frac{W^2-M^2}{2p} = (2M\nu - Q^2)/2p \quad (12.56)$$

となる．ここで，最右辺の式に移るとき (12.34) を使った．一方核子がいくつもの自由パートンとして別れていられる時間は，パートンの質量を μ_i とし，縦運動量 $p_{i/\!/} = x_i p_{/\!/}$ をもつものとすると

$$(1/\tau_{\mathrm{free}}) \sim \varDelta E = \sqrt{p^2+M^2} - \left\{\sqrt{(xp_{1/\!/})^2 + p_{1\perp}{}^2 + \mu_1{}^2} + \sum_{i\geqq 2} \sqrt{(x_i p_{/\!/})^2 + p_{i\perp}{}^2 + \mu_i{}^2}\right\} \quad (12.57)$$

ただし，電子は第 1 番目のパートンと相互作用するものとする．核子が無限大の運動量をもてば（近似的には十分高エネルギーであれば）パートンはすべて核子と同方向に動くとみてよい．また，パートンの運動量の総和は親の陽子の運動量に等しくなければならないから，

$$0 < x_i < 1, \qquad \sum x_i = 1$$

$$[(x_i p_{/\!/})^2 + p_{\perp i}{}^2 + \mu_i{}^2]^{1/2} \sim x_i p_{/\!/} + \frac{\mu_i{}^2 + p_{i\perp}{}^2}{2x_i p} \quad (12.58\,\mathrm{a})$$

を使えば

$$\varDelta E \sim \frac{1}{2p}\left[M^2 - \sum_i \left(\frac{\mu_i{}^2 + p_\perp{}^2}{x_i}\right)\right] \quad (12.58\,\mathrm{b})$$

この式は，$x_i \to 0$, $x_i \to 1$ で近似が悪くなることを示す．近似の成立する目安

は $1 \gg x_i \gg \mu/p,\ p_\perp/p$ である．パートンはエネルギー運動量

$$p_i^\mu = (\sqrt{(x_i p_{/\!/})^2 + p_{i\perp}{}^2 + \mu_i{}^2}\,;\ p_{i\perp},\ x_i p_{/\!/})$$

をもつが，上記の条件内で近似的に $p_i^\mu \simeq x_i p^\mu$ と見なせる．そこで散乱の前後でパートンは自由粒子であるという条件 $(p_i{}^2 = \mu_i{}^2)$ を入れると（図 12.7 (b) 参照），

$$\mu_1{}^2 = (x_1 p)^2 = (q + x_1 p)^2$$

$$\therefore \quad x \equiv x_1 = -\frac{q^2}{2(pq)} = \frac{Q^2}{2M\nu} \tag{12.59}$$

結局インパルス近似の成立する条件は

$$E \gg M,\ Q^2 \gg M^2,\ 2M\nu \gg M^2 \tag{12.60 a}$$

$$0 < x = \frac{Q^2}{2M\nu} < 1 \tag{12.60 b}$$

となった．これはブヨルケン・スケーリングの成立する条件 (12.50) と同じである．この条件を満たす散乱を深非弾性散乱 (deep inelastic scattering) と呼ぶ．このような条件を満たす座標系は運動量無限大の系と呼ばれる．図12.8

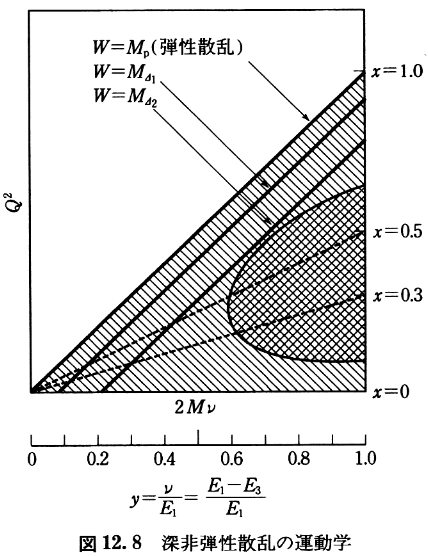


図 12.8　深非弾性散乱の運動学

斜線をつけた部分が許される範囲．
$W=M_p$ $(x=1)$ が弾性散乱，$W=M_\Delta$ が準弾性散乱に対応する．格子斜線部分が深非弾性散乱領域．エネルギーが高くなるほど，斜線部分境界近くまで広がる．

に Q^2, ν の可能な領域と，x, y, W がどのように位置しているかの相互関係を示す．実験データの示すところによれば，実際には $Q \gtrsim 1\,\mathrm{GeV}$ で早くもスケーリングが成立している（図 12.5 (b)）．次に，スケーリングとはどのような物理的条件のときに成立するのかを考察する．

12.4.2　電子とパートンの弾性散乱

a．スケーリング変数

後に明らかになることであるが，パートンはクォークとグルーオンより成る．グルーオンは電荷をもたないので散乱に寄与しない．したがってここではパートンはクォークと考えることにする．パートンはスピン 1/2 の点粒子で質量 μ，電荷 $\lambda_q e$ をもつとすれば，クォークの静止系での e^-q 散乱の式は，(12.16) で，$M \to \mu$, $\alpha \to \lambda_q \alpha$ として得られる．

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{LAB}}} = \frac{4(\lambda_q \alpha)^2}{q^4}\frac{\omega'^3}{\omega}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1+\frac{Q^2}{2\mu^2}\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \qquad (12.61)$$

実際はパートンは核子の中で，(12.59) で決まる相対運動量 x で動いているので，ローレンツ不変な変数 x, y を定義して，(12.61) を書き直す必要がある．まずこれまでは実験室系の変数とみた ν が実はローレンツ不変量と見なせることを示そう．$E \gg M$ の極限で，電子と陽子の質量は，E に対しては無視することにすれば次式が成立する．

$$s = (k+p)^2 \simeq 2(kp) = 2\omega M \quad ：実験室系 \qquad (12.62\,\mathrm{a})$$

$$y \equiv \frac{(pq)}{(pk)} = \frac{\omega - \omega'}{\omega} \equiv \frac{\nu}{\omega} = \frac{2M\nu}{s} \quad ：実験室系 \qquad (12.62\,\mathrm{b})$$

$$x \equiv \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{sy} = \frac{s(1-y)\sin^2(\theta/2)}{M^2 y} \quad ：実験室系 \qquad (12.62\,\mathrm{c})$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{M^2 xy}{s(1-y)}, \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{M^2 xy}{s(1-y)} \simeq 1 \quad ：実験室系 \qquad (12.62\,\mathrm{d})$$

演習 12.6　$0 < \dfrac{Q^2}{2M\nu} (=x) < 1$, $0 < \dfrac{2M\nu}{s} (=y) < 1$ を確かめよ．

b．パートン分布関数

さて，弾性散乱の場合，実験室系では θ と ω' は (12.35) 式で結びついていており，また，重心系では

$$y=\frac{(pq)}{(pk)}=\frac{E(\omega-\omega')-(-\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')}{E\omega-(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})}\simeq\frac{1-\cos\theta^*}{2}\text{：重心系} \tag{12.63}$$

という対応関係があることに注目すれば

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}=\omega\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\omega'}=\frac{4\pi M^2}{s(1-y)^2}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\bigg|_{\mathrm{LAB}}=4\pi\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\bigg|_{\mathrm{CM}} \tag{12.64}$$

がいえる．この式は電子と質量 M をもつ標的との 2 体系で定義される量である．これらを電子とパートンとの 2 体系に適用するときは $M\to\mu$, $s\to s_{\mathrm{q}}$ とし，弾性散乱であるからこの系では

$$Q^2=2\mu\nu=s_{\mathrm{q}}y$$

が成立することに注意して，(12.61) を書き直すと，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}\bigg|_{\mathrm{e\text{-}q}}=\frac{4\pi\lambda_{\mathrm{q}}{}^2\alpha^2}{Q^4}s_{\mathrm{q}}\left[(1-y)+\frac{y^2}{2}\right] \tag{12.65}$$ [*2)]

パートンが陽子の中にあるときにもつ 4 元運動量は xp で与えられるから

$$s_{\mathrm{q}}=(k+xp)^2\simeq 2x(kp)\simeq xs \tag{12.66}$$

核子の中での i 番目のパートンの運動量分布を $q_i(x)$ と書くと，運動量が $x\sim x+\mathrm{d}x$ の間にある確率は $q_i(x)\mathrm{d}x$ であるので，電子と陽子の中の i 番目のパートンとの散乱断面積は

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}s[(1-y)+(y^2/2)]\lambda_i{}^2xq_i(x)\mathrm{d}x \tag{12.67}$$

したがって，電子と核子の反応はすべてのパートンについて足し上げて，

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}s[(1-y)+(y^2/2)]\sum_i\lambda_i{}^2xq_i(x) \tag{12.68}$$

電子とパートンが弾性散乱をするといっても反跳パートンが観測にかかるわけではない．核子の外に出るときは必ず π や N など種々のハドロンになっている．しかし，パートンとの弾性散乱としての特徴は電子の振る舞いを見るだけで推測できる．(12.68) の式は電子を観測すれば得られる変数のみで書かれていることに注意しよう．

(12.47) の非弾性散乱一般式を変数 x, y で書き直すと

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}s[\nu W_2(1-y)+2xMW_1(y^2/2)] \tag{12.69 a}$$

*2) この式は (5.102) に (12.64) を入れてもでる．

となるので (演習 12.7)，スケーリング極限では

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}s[F_2(x)(1-y)+2xF_1(x)(y^2/2)] \qquad (12.69\,\mathrm{b})$$

(12.68) と比較するとクォークモデルは

$$F_2(x)=x\sum\lambda_i^2 q_i(x) \qquad (12.70\,\mathrm{a})$$

$$F_1(x)=(1/2)\sum\lambda_i^2 q_i(x) \qquad (12.70\,\mathrm{b})$$

を与える．すなわち，深非弾性散乱をパートンとの弾性散乱の和と見なせば，構造関数 $W_{1,2}(Q^2,\nu)$ が，Q^2 と ν の比である x のみの関数となること (ブヨルケン・スケーリング (12.51)) が示された．それのみならず，F_i に対してパートンの核子内での運動量分布という物理的意味付けをも与えている．現象論的には価クォーク (後述) や反クォークに対しそれぞれ

$$xq_v(x)\sim Ax^{1/2}(1-x)^3, \qquad x\bar{q}(x)\sim B(1-x)^5$$

などの関数を使うとデータを良く再現できる (図 12.18 参照)．ただし分布関数は Q^2 が大きくなると変化する．上の形は $Q^2\lesssim 20\mathrm{GeV}^2$ での形である．

演習 12.7　(12.47) を x, y の関数で表すと (12.69) の形になることを示せ．

12.5　等価光子との散乱

ここでは，電子非弾性散乱の特性を理解し，直観的描像を得やすくする手段として，別の視点つまり，電子非弾性散乱を等価光子と陽子との反応とみる視点を試みる．表現を変えたからといって，情報量が増えるわけではないが，状況によっては，等価光子との反応と見なす方が物理的解釈がつけやすいことがある．

12.5.1　横波と縦波フォトン

いままでの考察は電子が1個のフォトンを核子と交換して，散乱を起こすという仮定に基づいている．この考えが有効ならば，核子が見ているのはフォトンであって電子ではない．核子は光子 (仮想フォトン) と相互作用していると見なすならば，電子は単なる光子の供給源であり，断面積はフォトンと核子の断面積に電子により生産されたフォトンの数を掛けて積分した量と考えること

ができる (後述脚注5；等価フォトンまたはワイゼッカー-ウィリアムス (Weiszacker-Williams) 近似[6]という).

フォトンと荷電粒子 (電荷 Qe) の相互作用は,

$$L_{\mathrm{INT}}=-Qe\int A_\mu(x)J^\mu(x)\mathrm{d}^4x \tag{12.71}$$

であるから，遷移振幅は,

$$T_{\mathrm{fi}}=-i(2\pi)^4\delta^4(k+p-P_{\mathrm{F}})\varepsilon_\mu(\lambda)e\langle F|J^\mu(0)|p\rangle \tag{12.72}$$

散乱の断面積は，標的の実験室系で

$$\mathrm{d}\sigma_\gamma=\frac{e^2}{4KM}\sum_{\mathrm{F}}(2\pi)^4\delta^4(k+p-P_{\mathrm{F}})\frac{1}{2}\sum_{\text{スピン},\lambda}\langle F|\varepsilon_\mu(\lambda)J^\mu|p\rangle\langle F|\varepsilon_\nu(\lambda)J^\nu|p\rangle$$

$$=\frac{4\pi^2\alpha}{K}\sum_\lambda\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)^*W^{\mu\nu} \tag{12.73}$$

と書ける．$W^{\mu\nu}$ は (12.41) で与えられ，電子陽子非弾性散乱にでてきた構造関数と同じものである．K は実験室系でのフォトンエネルギー，M は標的の質量，$\varepsilon_\mu(\lambda)$ は偏光状態 λ の偏極ベクトルである．

仮想光子であることに伴う二つの問題がある．一つは仮想光子の縦偏極ベクトルをどう決めるかである．ベクトル粒子の偏極ベクトル $\varepsilon(\lambda)$ は，粒子の 4 元運動量を q^μ とすれば,

$$q\cdot\varepsilon(\lambda)=q_\mu\varepsilon^\mu(\lambda)=0 \qquad \lambda=\pm1,0 \tag{12.74}$$

を満たさなければならない．自由粒子であれば q は時間的 $(q^2>0)$ であり，(12.74) を満たす 3 個の偏極ベクトルはすべて空間的であるが，仮想粒子の場合は q が空間的であるので，$\varepsilon(\lambda)$ の一つは時間的となる．そこで，3 個の偏極ベクトル $\varepsilon(\lambda)$ を次のように定義する[7].

$$\varepsilon_\pm=\mp(0;1,\pm i,0)/\sqrt{2} \tag{12.75 a}$$

$$\varepsilon(0)=(q_3;0,0,q_0)/\sqrt{-q^2}=(\sqrt{\nu^2-q^2};0,0,\nu)/\sqrt{-q^2} \tag{12.75 b}$$

これらの偏極ベクトルは，ローレンツ条件 (12.74) のほかに規格直交性

$$\varepsilon(\lambda)\cdot\varepsilon(\lambda')^*=\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon^\mu(\lambda')^*=(-)^\lambda\delta_{\lambda\lambda'} \tag{12.76 a}$$

と完全性の条件,

$$\sum_\lambda(-1)^{\lambda+1}\varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon^\nu(\lambda)^*=-\left(g^{\mu\nu}-\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) \tag{12.76 b}$$

を満たす*3).

演習 12.8　$\varepsilon^\mu(0)=a\left(p^\mu-\dfrac{(pq)}{q^2}q^\mu\right),\ a=\left(p^2-\dfrac{(pq)^2}{q^2}\right)^{-1/2}$ と書けることを示せ．ただし，p^μ は陽子の4元運動量である．

第2の問題点は，K は入射光子のエネルギーであるが，仮想光子のときは $q^2\to 0$ のときにフォトンのエネルギーに一致するものであれば何でもよく不定性がある．ここでは，フラックスの定義 (C.5),

$$4KM|_{\mathrm{LAB}}=4[(qp)^2-q^2p^2]^{1/2}=4M(\nu^2+Q^2)^{1/2} \tag{12.77 a}$$

より決まる

$$K=(\nu^2+Q^2)^{1/2} \tag{12.77 b}$$

を使うことにする[8),*4)]．(12.73), (12.75), (12.76) を用いれば横偏極のフォトンと縦偏極のフォトンによる断面積 $\sigma_\mathrm{T}, \sigma_\mathrm{L}$ は

$$\sigma_\mathrm{T}\equiv\frac{1}{2}\frac{4\pi^2\alpha}{K}\sum_{\lambda=\pm1}\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)^*W^{\mu\nu}=\frac{4\pi^2\alpha}{K}W_1 \tag{12.78 a}$$

$$\sigma_\mathrm{L}\equiv\frac{4\pi^2\alpha}{K}\sum_{\lambda=0}\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)^*W^{\mu\nu}=\frac{4\pi^2\alpha}{K}W_\mathrm{L} \tag{12.78 b}$$

$$W_\mathrm{L}=[(1+\nu^2/Q^2)W_2-W_1] \tag{12.79}$$

スケーリングの成り立つところでは，

$$\sigma_\mathrm{T}\longrightarrow(4\pi^2\alpha/KM)F_1 \tag{12.80 a}$$

$$\sigma_\mathrm{L}\longrightarrow(4\pi^2\alpha/KM)F_\mathrm{L}$$

$$F_\mathrm{L}=(1/2x)(F_2-2xF_1) \tag{12.80 b}$$

がいえる．

演習 12.9　(12.78) を導け．

---

*3)　通常の有限質量 M をもつベクトル粒子の縦波偏極ベクトルは，静止系での

$$\varepsilon(\lambda=0)=(0;0,0,1)$$

をローレンツブーストした

$$\varepsilon(\lambda=0)=(q^3;0,0,q^0)/\sqrt{M^2}=(\sqrt{(q^0)^2-q^2};0,0,q^0)/\sqrt{q^2}$$

を使うので，$\varepsilon(\lambda=0)^2=-1$ であるが，仮想フォトンでは $q^2<0$ (空間的) であるので，規格化因子に $(-q^2)^{1/2}$ を使って偏極ベクトルが時間的になるようにする．その結果 $\varepsilon(\lambda=0)^2=1$ となり，また (12.76) の和の中の計量が異なる．$q^0=0$ は実際に実現でき (ブライト系)，そこでは

$$\varepsilon(\lambda=0)=(1;0,0,0)$$

であるので，スカラーフォトンとも呼ばれる．

*4)　電子部を取り除いた，フォトンの反応部のみの観測量で決められる通称ハンド (Hand) の定義[9)]

$$K=(W^2-M^2)/2M=\nu-(Q^2/2M) \tag{12.77 c}$$

もよく使われる．

12.5.2　標的のスピン

a．カラン-グロスの式

(12.70) を参照すればわかるように，標的がスピン 1/2 のときは，

$$F_2=2xF_1 \tag{12.81}$$

が成立する．これをカラン-グロス (Callan-Gross) の関係式という[10]．このとき $\sigma_L/\sigma_T=0$ となる．一方もし標的がスピン 0 のときは，磁気散乱項はないから $F_1=0$ であり，$\sigma_T/\sigma_L=0$ となる．つまりフォトンの断面積としてみるときは標的のスピンを識別するのが容易である．

b．ブライト系

この事情は，ブライト（別名煉瓦の壁；brickwall system）系で考えればはっきりする（図 12.9）．この系では，電子は x 方向の運動量は変えず z 方向の運動量のみ符号を変える．つまりエネルギー遷移はなく運動量遷移のみ引き起こす．一方陽子は（あるいは陽子の中に存在するパートンは），$+z$ 方向から入り，電子による運動量だけを受けてこれもまた方向転換をして $+z$ 方向に戻ってゆく．つまりこの系では電子も陽子もあたかも煉瓦の壁に衝突して跳ね返されるかのような運動をする．横偏極のフォトンはスピン成分 1 を標的に与えるから，標的がスピン 0 をもつときはこのフォトンを吸収できず，$\sigma_T=0$ と

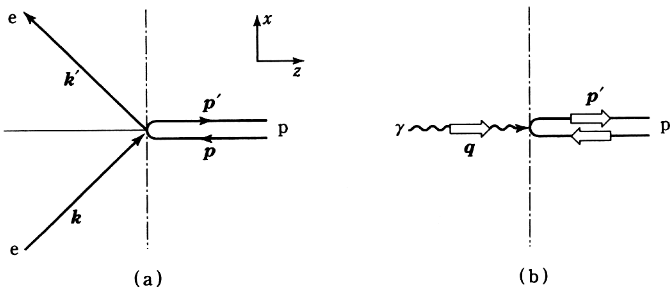


図 12.9

ブライト系 (a) では，電子と陽子はともにあたかも煉瓦塀に跳ね返されるように，エネルギーと p_x は変えずに p_z のみ変える．陽子は $+z$ 方向から入射し $+z$ 方向に跳ね返される．仮想フォトンは運動量 $\boldsymbol{q}$ をもって入射し陽子により吸収される．電子のスピンは 1/2，仮想フォトンのスピンは 1（横波），0（縦波）であるので，角運動量保存則により横波フォトンのみ陽子は吸収できる．∴ $\sigma_L=0$．逆に陽子のスピンが 0 であれば縦波フォトンのみ吸収できて $\sigma_T=0$ となる．

なる．標的がスピン 1/2 のときはスピンが反転するときは $\Delta s_z=1$，反転しないときは $\Delta s_z=0$ なので，どちらのフォトンをも吸収できそうであるが，電磁相互作用はベクトル型であるのでカイラリティを保存することに注意する．つまり質量が 0 の極限でヘリシティを保存する（スピンを反転する）ので $\sigma_L=0$ となる．実験的には（図 12.10）[11]，陽子の中にあるパートンはスピン 1/2 の成分が優勢であることを示している．

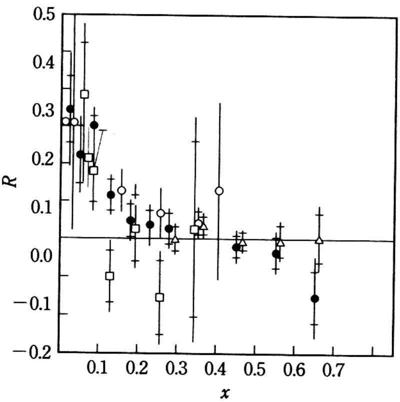


図 12.10　カラン-グロスの関係式 ($F_2=2xF_1$) が成立すれば，$R\left(=\frac{\sigma_L}{\sigma_T}=\frac{F_2-2xF_1}{2xF_1}\right)$ → 0 となるはずである．$x\lesssim 0.1$ を除いて成立していることがわかる[11]．

演習 12.10*　電子非弾性散乱の式 (12.47) を仮想フォトンの断面積で書き表せ．答は

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega' d\Omega}=\Gamma(\sigma_T+\varepsilon\sigma_L) \tag{12.82 a}$$

$$\Gamma=\frac{\alpha K}{2\pi^2 Q^2}\frac{\omega'}{\omega}\frac{1}{1-\varepsilon} \tag{12.82 b}$$

$$\varepsilon=\left[1+2\frac{\nu^2+Q^2}{Q^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right]^{-1} \tag{12.82 c}$$

演習 12.11　標的が質量 m をもつとき，あるいは横運動量 $\langle p_\perp{}^2\rangle$ をもつとき

$$\frac{\sigma_L}{\sigma_T}=\frac{4\{\langle p_\perp{}^2\rangle+m^2\}}{Q^2} \tag{12.83}$$

で与えられることを示せ．

ヒント　ブライト系で，$\gamma^*+p_i\to p_f$ の断面積 (12.78) を計算せよ．この系では仮想フォトンはエネルギーをもたず運動量のみをもつ．

$$q^\mu=(0;0,0,\sqrt{-q^2}),\qquad \varepsilon^\mu(0)=(1;0,0,0)$$

演習 12.12* 電子非弾性散乱断面積を仮想光子の断面積で表した (12.82) は，運動量無限大の系では

$$d^2\sigma = dP(y, Q^2)dy[\sigma_T + \varepsilon\sigma_L] \tag{12.84}$$

$$dP(y, Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1+(1-y)^2}{y}\right\} d\ln Q^2 \tag{12.85 a}$$

$$\varepsilon = \frac{2(1-y)}{1+(1-y)^2} \tag{12.85 b}$$

と表されることを示せ．この式は電子が質量 Q^2，運動量 y の仮想光子を提供しそのフラックスが $dP(y, Q^2)dy$ で与えられると解釈できる．これはワイゼッカー-ウィリアムの式*5) として知られる．

12.6　ニュートリノ実験技術

12.6.1　ニュートリノビーム

ニュートリノは，パウリによって 1931 年にその存在を予言されてから，実際の検証までに 25 年，高強度のニュートリノビームが実験に供せられるのに，さらに 30 年かかった．それはひとえにニュートリノが弱い相互作用しかしないこと，つまり物質との反応率が極端に低いことによる．しかし，いったん実用に供せられるようになったときは，弱い相互作用の性質を探る理想的なプローブとなる．そのためには大加速器の建設と，科学技術の発展を待たねばならなかった．ニュートリノは中性であり，かつその物質との反応率の弱さから実験条件を制御するのがむずかしい．それをどのように克服したかを簡単に述べる．

*5) $p_T = 2k'\sin(\theta/2)$ とすると，運動量無限大の系では，

$$Q^2 \simeq p_T{}^2/(1-y) + m_e{}^2y^2/(1-y)$$

であり，$Q^2{}_{min} \approx m_e{}^2y^2/(1-y)$ から $Q^2{}_{max} \approx \omega^2\theta_{max}{}^2/(1-y)$ までフラックスを $\ln Q^2$ について積分し，ln の中の θ_{max} などは ω/m_e に比べて無視すると，

$$\int d\ln(Q^2) \simeq 2\ln(\omega/m_e)$$

が導ける．したがって，フォトンのエネルギーを $y\omega$ として

$$\sigma(eA \to e'A') = \frac{\alpha}{\pi}\int\frac{1+(1-y)^2}{y}\left(\ln\frac{\omega}{m_e}\right)\sigma(\gamma A \to A'; y)dy$$

となる．これが通常ワイゼッカー-ウィリアムス (Weiszacker-Williams) の式として知られるものである[6]．

ニュートリノビーム：高エネルギー(≫10 MeV) ニュートリノビームは主として，

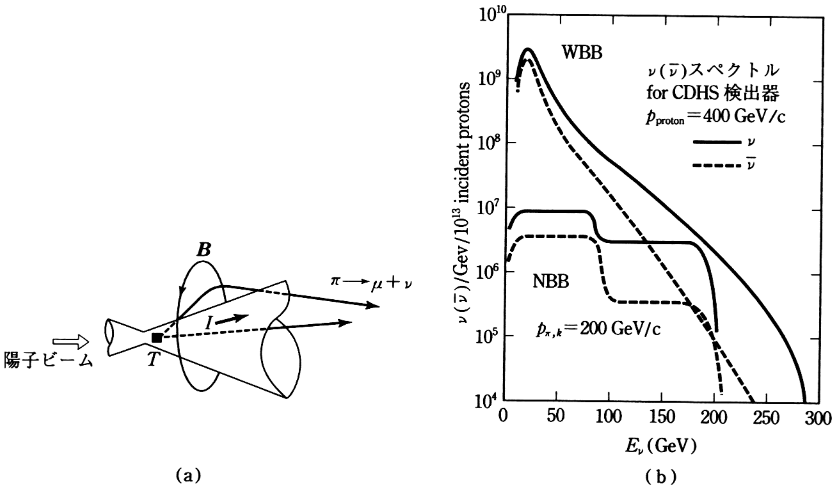
$$\pi^+(\pi^-) \longrightarrow \mu^+(\mu^-)+\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \tag{12.86}$$
$$K^+(K^-) \longrightarrow \mu^+(\mu^-)+\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$$

から得られる ν_μ または $\bar{\nu}_\mu$ を使用する．$\nu_e(\bar{\nu}_e)$ を得るには

$$\mu^+(\mu^-) \longrightarrow e^+(e^-)+\nu_e(\bar{\nu}_e)+\bar{\nu}_\mu(\nu_\mu) \tag{12.87}$$
$$K^+(K^-) \longrightarrow \pi^0+e^+(e^-)+\nu_e(\bar{\nu}_e)$$

の反応が使われる．低エネルギー (1〜4 MeV 付近) では，原子炉で発生する β 崩壊からの $\bar{\nu}_e$ を使うこともある．

初期の実験では，ビームとしての性能は問わないでとにかく強度を稼ぎたいという要請が強かった．このためには 1 次陽子ビーム (〜400 GeV；以下，1970 年代のフェルミ/セルン研究所を例にとる) によって生成される π や K の 2 次粒子をなるべく方向をそろえて前方に集めてやる必要があった．全部を集束させるのは不可能であるが，ホーンはこれに近い働きをする．これはらっ



(a)　　(b)

図 12.11

(a) ホーンの原理図．ホーンに矢印の方向に電流 I を流すとホーンをとりまく磁場 $\boldsymbol{B}$ ができる．これは標的 T からでる 2 次粒子 π を前方に集束させる．

(b) WBB (広帯域ビーム) がホーンにより得られるニュートリノビームスペクトル．NBB (狭帯域ビーム) は 2 次 π を 2 極と 4 極電磁石で単色にしてから，崩壊させると得られるスペクトル[12)]．

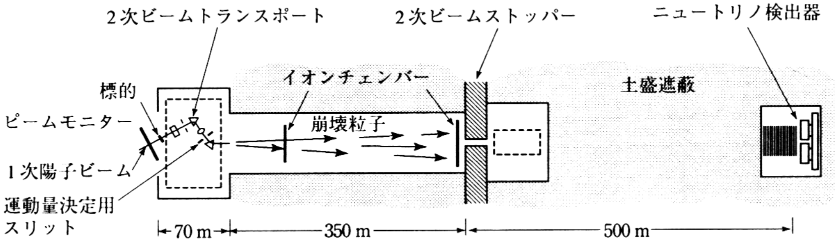


図 12.12　フェルミ研究所における複色ニュートリノビームライン
第1次標的に当てて π 中間子を発生させた後，2極と4極磁石よりなるビーム集束装置で単色にしてから，崩壊パイプへ入れる．崩壊ニュートリノは土盛りのフィルターを通してからニュートリノ検出装置にもってくる．π 中間子はビームダンプで吸収させ，崩壊した μ はフィルターで止める．ビームを単色 (mono-chromatic) にしても，K と π からのニュートリノは別のエネルギーをもつから，複色 (di-chromatic) となる．

ぱ状のホーンの喉のところに2次粒子生成用標的を置き，ホーンに大電流（例えば10万アンペア）を流せば，磁場の作用によってある程度の角度の範囲の荷電粒子はほとんどすべて前方に焦点を結ぶように設計できる（図12.11 (a)）．この π や K 粒子のビームを，長い崩壊管（$\sim$350 m）の中に通してやれば，他端にたどりつくまでに十分な数の粒子が崩壊して，ミューオン μ とニュートリノになる．終端には遮蔽層を置き，崩壊しなかったハドロンと μ をろ過する（図12.12）．ハドロンは強い相互作用をするので，数m厚のコンクリートか鉄で十分ろ過可能であるが，μ は電磁相互作用しかしないので，gr あたり 2MeV のイオン化エネルギー損失を与えるのみである．例えば200 GeV の μ を止めるには，10^5gr＝100 kg＝鉄120 m のろ過層を必要とする．安上がりを狙うならば土盛りであるが，密度が小さい (2～3) ので同じろ過能力をもつためには～400 m の長さが必要となり，ニュートリノ強度で10倍の差が出る（強度は距離の自乗に比例して落ちる）．こうして得られたニュートリノビームを広帯域 (wide band) ビームといい，そのスペクトルを図12.11 (b) に示した．広帯域ビームでは電荷が違えばホーンにより逆方向に曲げられて発散するので，ν と $\bar{\nu}$ をある程度は分離できるが，超前方に放出された粒子はホーンの中を通らないので，異種の ν がかなり混じる．

しかし，研究が進み精度の良い実験が求められるようになると，ν のエネルギーやフラックス（ビーム強度）などを制御する必要がでてくる．そのために

狭帯域ビームが使われるようになった．ν は中性であるからエネルギーの直接測定はできないが，2体崩壊 ($\mathrm{K}, \pi \to \mu\nu$) でできるという運動学の特徴を活かしてエネルギーを知ることができる．重心系の量は * を付けて表すことにすると，実験室系のエネルギー E_{LAB} は，ローレンツ変換によって，

$$E_{\mathrm{LAB}} = \gamma(E_\nu{}^* + \beta p_\nu{}^* \cos\theta^*) \tag{12.88 a}$$

$$p_\nu{}^* = E_\nu{}^* = (M^2 - m_\mu{}^2)/2M \tag{12.88 b}$$

ただし，M は親の質量である ($M = m_{\mathrm{K}}, m_\pi$)．$\beta, \gamma$ はローレンツ因子であり，親粒子の運動量エネルギー P, E を使えば

$$\beta = P/E, \qquad \gamma = E/M \tag{12.89}$$

と表される．親粒子のスピンは 0 であるので重心系での崩壊は等方的である．したがって崩壊分布は，

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{d}\Omega^* = \frac{1}{2}\mathrm{d}\cos\theta^* = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{LAB}}}{2\beta\gamma E_\nu{}^*} \sim \mathrm{const} \cdot \mathrm{d}E_{\mathrm{LAB}} \tag{12.90}$$

すなわち，実験室系でのニュートリノのエネルギースペクトルは最高エネルギーと最低エネルギーの間で一定である．

$$\min(E_{\nu\mathrm{LAB}}) = E_\nu{}^* \gamma(1-\beta) \simeq 0 \tag{12.91}$$

$$\max(E_{\nu\mathrm{LAB}}) = E_\nu{}^* \gamma(1+\beta) \simeq 2\gamma(M^2 - m_\mu{}^2)/2M = E[1-(m_\mu/M)^2]$$

$$= \begin{cases} 0.427E & ：親が\ \pi\ のとき \\ 0.954E & ：親が\ \mathrm{K}\ のとき \end{cases} \tag{12.92}$$

であるので，K 粒子からのニュートリノは π からのに比べて，ほぼ2倍の最高エネルギーをもつことがわかる．しかし，π の生成断面積は K よりずっと大きいから低エネルギーでは π からのニュートリノが多い．図 12.11 に 2 次粒子のエネルギーを ~200 GeV に設定したときの狭帯域のビーム (CERN) のスペクトルを示す．$E_\nu \lesssim 80$GeV では π からの，$E_\nu \gtrsim 80$ GeV では K からのニュートリノが優勢であることがわかる．

実験室系での E_ν と放出角 θ_ν との間には

$$E_\nu = \frac{M^2 - m_\mu{}^2}{2(E - P\cos\theta_\nu)} \tag{12.93}$$

のように 1：1 の関係があるので (図 12.13 (a))，θ_ν の情報が別に得られるときは E_ν もわかる．$E \gg M$, $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$ を使うと

$$E_\nu \simeq E_{\nu\max}\frac{\theta_0{}^2}{\theta^2+\theta_0{}^2} \tag{12.94}$$

$$\theta_0=(M/P)$$

したがって，ビーム光学を使って，親粒子の運動量を一定にそろえたときのニュートリノエネルギーと放出角の相関は図12.13 (b) のようになる．この式よりニュートリノはほとんど前方の半頂角 (M/P) で決まる円錐の中に集中してでることがわかる．崩壊点が既知であれば (通常は K または π が崩壊する真空トンネルの中点と仮定する)，ニュートリノ検出器での反応点のビーム軸からの距離を知ることによって θ_ν がわかるので，E_ν もわかることになる．図 12.13 (c) は CERN の CDHS 実験のデータを示したもので[12]，(12.94) の関係がよくでている．このようにニュートリノのエネルギーを知るために親の粒子のエネルギーを一定にしたビームを狭帯域 (narrow band) ビームという．このビームはまた親のビーム強度も測定しやすく情報量が多いので，系統

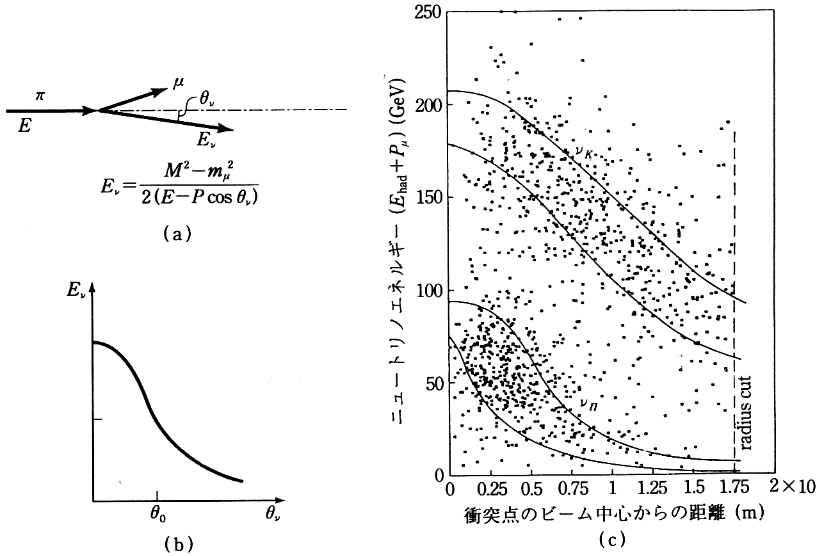


図 12.13

親の π (または K) が単色のときはニュートリノ崩壊角 θ_ν とエネルギー E_ν には 1：1 の関係があり (a)，$E \gg M$ のときは $E_\nu \simeq E_{\nu\max}\frac{\theta_0{}^2}{\theta^2+\theta_0{}^2}$ で表される (b)．(c) は CERN の複色ニュートリノビームの $\theta_\nu - E_\nu$ スキャッタープロット[12]．

誤差の小さい良好な実験が可能であるが強度の点でかなり犠牲を払っている．図 12.11 (b) には比較のため広帯域ビームのスペクトルをも載せてあるが，ビーム強度が 100 倍以上も違うのがわかる．

12.6.2 ニュートリノ検出器

反応事象の計数率は $N=N_\nu\sigma_{\text{TOT}}N_{\text{TARGET}}$ で与えられる．σ_{TOT} は調べるべき対象であるから実験者の支配外であるが，断面積は E_ν に比例して増加するので(後述 (12.109))，E_ν を上げることによって多少有利にできる．N_ν は上に述べたように加速器で決まるから，実験家の工夫のしどころは，いかに N_{TARGET} を大きくするか (標的重量を大きくする) にかかっている．ニュートリノ実験では，N_{TARGET} を大きくするために巨大な標的を使うが，このとき発生した反応をむだにしないためには標的自身が測定器となっていなければならない．泡箱はこの条件を満たした理想的な標的兼検出器である．反応の全粒子の運動学がわかるという利点があり，新現象の種類によっては一例でも明確な結論をだすことが可能である．例えば $SU(3)$ 検証に大きな役割を果たした Ω 粒子発見とか，中性カレントの最初の事象発見などである．しかしニュートリノ実験もやがて精密さを要求されるようになると統計精度を上げたくなる．泡箱は磁石の中に設置しなければならないという制限で，そう大きくはできないので統計量には限界がある．CERN のガルガメル (Gargamelle)，ベブス (BEBC＝Big European Bubble Chamber) やフェルミ研究所の 15 フィート泡箱などは現代技術の粋をつくした超伝導電磁石を使ったにもかかわらず重量としては 10 トン程度が限度であった．そこで，統計精度を増やすためには重量を自由に増やせるカウンター実験装置が使われる．ニュートリノ反応で生成される第 2 次粒子は μ, e 以外はほとんどハドロンであるが，これは後述するようにクォークがハドロンのジェット (たくさんのハドロンが同方向に噴出される現象) に転化した遺物であり，個々のハドロンの情報を集めてもその集団的振る舞いのみが問題となることが多く，泡箱のように 1 個 1 個の情報を取り出すと情報過多で消化不良に陥る．そこで思い切りよく情報を整理して，ハドロンの全体としてのエネルギーと方向 (エネルギーベクトル) だけに絞ると測定器が大幅に簡略化でき，その分質量を大きくできるので統計精度が稼げる．図 12.

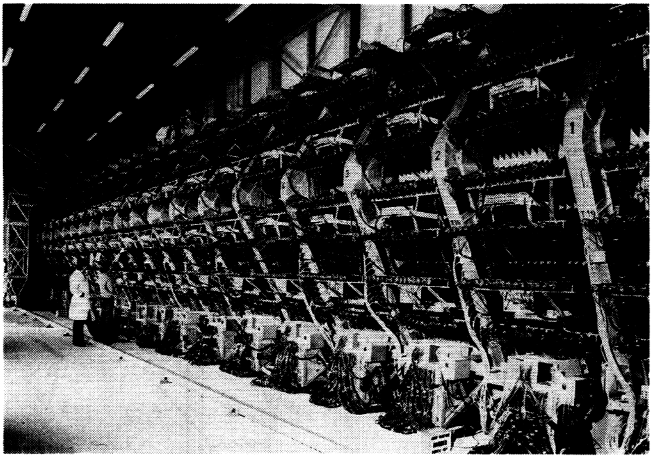


図 12.14 CERNにおけるCDHSニュートリノ検出器（写真はCERN提供）

14に示すのは最も代表的なニュートリノ検出器のCERNのCDHS（CERN-Dortmund-Heidelberg-Saclay）グループの測定器である[12]．基本的には全部鉄（磁化鉄）であるが，μの軌跡とハドロンのエネルギーを測定するために全体を19のモジュールに分割し，各モジュールをさらに鉄5 cmまたは10 cmごとに分割しその間に軌跡検出用のドリフトチェンバーと，エネルギー測定用のハドロンシャワーカロリメーターを組み込む．全重量1235トンという戦艦並の大きさをもちながら，全身エレクトロニクスのお化けといってよいほどの読み出しチャネルを装備している．得られる情報は，

1) 反応発生点の座標：これから入射ニュートリノのエネルギー(ω)が決められる．

2) μの散乱角(θ)と，エネルギーω'：鉄中の磁場により曲げられる軌跡の曲率より計算可能．

3) ハドロンのエネルギー(E_{had})：ハドロンカロリメーターで測定．

で，この三つの情報により，s, x, yの3変数を決めると同時に自己無矛盾性($E_{\text{had}}=\omega-\omega'$)のテストをも行う[*6]．

[*6] 中性カレント現象も測定可能である．ただし，このときはμが存在しないので，x情報は得られない．

12.7　ニュートリノ深非弾性散乱

12.7.1　断面積と構造関数

ニュートリノの非弾性散乱のファインマングラフは図12.15(b) のように表される．中間ボソン W の質量を無限にすれば，4-フェルミ相互作用となるが，電磁相互作用との類似を明らかにするため W 交換の図を描いておく．レプト

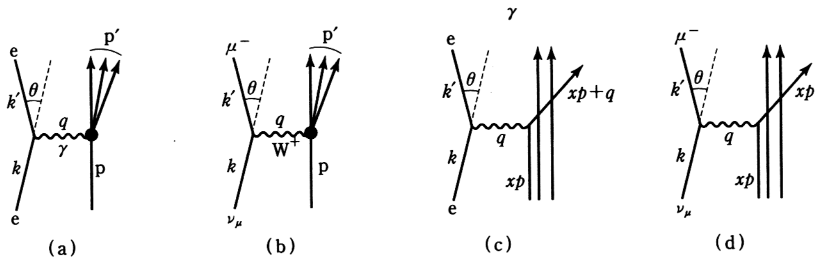


図 12.15　(a) 電子深非弾性散乱．(b) ニュートリノ深非弾性散乱．(c)，(d) は (a)，(b) をクォーク図で書いたもの．電子側およびニュートリノ側の運動学を同じにすれば，どちらもパートンとの 2 体弾性散乱と見なせる．この 2 体の運動学は入射エネルギーを固定すれば y のみの関数である．スケーリングが成立すれば x はパートンの始状態運動量であり，その分布は核子内のパートン運動量分布関数 $q(x)$ で与えられる．これは入射粒子が電子またはニュートリノによらず同一関数を与える．

ンの弱カレントとハドロンの弱カレントを，それぞれ l^μ, J^μ で表せばラグランジアン $\mathscr{L}_{\mathrm{F}}$ は，

$$-\mathscr{L}_{\mathrm{F}}=(G_{\mathrm{F}}/\sqrt{2})(l^{-\mu}J^{+}{}_{\mu}+l^{+\mu}J^{-}{}_{\mu}) \tag{12.95}$$

$$l^{-\mu}=\bar{\mu}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\nu, \qquad l^{+\mu}=\bar{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\mu=(l^{-\mu})^{\dagger}$$

$$J^{+}{}_{\mu}=\bar{u}\gamma_{\mu}(1-\gamma^5)d, \qquad J^{-}{}_{\mu}=\bar{d}\gamma_{\mu}(1-\gamma^5)u=(J^{+}{}_{\mu})^{\dagger}$$

(12.95) の第 1 項は ν 散乱に，第 2 項は $\bar{\nu}$ 散乱に効く．電子の場合と同じく構造関数を，ν と $\bar{\nu}$ について書くと

$$W^{\nu,\bar{\nu}}{}_{\rho\sigma}=\frac{(2\pi)^4}{4\pi M}\sum_{\mathrm{F}}\delta^4(p-q-P_{\mathrm{F}})\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{\text{スピン}}\langle p|J^{\mp}{}_{\rho}|F\rangle\langle F|J^{\pm}{}_{\sigma}|p\rangle$$

$$=\left(-g_{\rho\sigma}+\frac{q_\rho q_\sigma}{q^2}\right)W_1(Q^2,\nu)$$

$$+\left(p_\rho-\frac{(pq)q_\rho}{q^2}\right)\left(p_\sigma-\frac{(pq)q_\sigma}{q^2}\right)\frac{W_2(Q^2,\nu)}{M^2}$$
$$-\frac{i}{2M^2}\varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}p^\alpha q^\beta W_3(Q^2,\nu)$$
$$+[q_\rho q_\sigma\text{ の項}]+[(p_\rho q_\sigma+q_\rho p_\sigma)\text{ の項}]$$
$$+[i(p_\rho q_\sigma-q_\rho p_\sigma)\text{ の項}] \tag{12.96}$$

弱カレントは軸性ベクトルカレントを含むため保存カレントではなく，電磁相互作用のときのように電流保存則を使って簡便化できない．しかし，(12.96)の最後の項は T 不変性を破るし，また第 4, 5, 6 項はレプトンカレントに掛けるとレプトンの質量（割る入射エネルギー）に比例するので最初の 3 項に比べ無視してよい．第 3 項がパリティ非保存に伴う新しい項である．断面積は次式で与えられる．

$$\frac{d^2\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{d\Omega d\omega'}=\frac{(G_F/\sqrt{2})^2}{4(kp)}K^{\rho\sigma}\cdot 4\pi M W^{\nu,\bar{\nu}}{}_{\rho\sigma}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \tag{12.97}$$

$$K^{\rho\sigma}=\sum_{\text{スピン}}\bar{u}(k')\gamma^\rho(1-\gamma^5)u(k)\bar{u}(k)\gamma^\sigma(1-\gamma^5)u(k')$$
$$=8[k'^\rho k^\sigma+k^\rho k'^\sigma-(kk')g^{\rho\sigma}-i\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta}k_\alpha k'_\beta] \tag{12.98}$$

ニュートリノはもともと L 成分しかもたず R 成分は存在しないからスピン平均の 1/2 は不要である．計算を実行すると

$$\frac{d^2\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{d\Omega d\omega'}=\frac{G_F^2}{2\pi^2}\omega'^2\left[2W_1^{\nu,\bar{\nu}}(Q^2,\nu)\sin^2\frac{\theta}{2}+W_2^{\nu,\bar{\nu}}(Q^2,\nu)\cos^2\frac{\theta}{2}\right.$$
$$\left.\mp W_3^{\nu,\bar{\nu}}(Q^2,\nu)\frac{\omega+\omega'}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{12.99}$$

となるので，変数 x, y に変換すると，ブヨルケン・スケーリング極限で，

$$MW_1(Q^2,\nu)\to F_1(x),\quad \nu W_2(Q^2,\nu)\to F_2(x),\quad \nu W_3(Q^2,\nu)\to -F_3(x) \tag{12.100}$$

F_3 の前の符号は便宜のためで，こうとると $F_3>0$ となる．

$$\frac{d^2\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{dx dy}=\frac{G_F^2}{2\pi}s\left[(1-y)F_2^{\nu,\bar{\nu}}(x)+\left(\frac{y^2}{2}\right)2xF_1^{\nu,\bar{\nu}}(x)\pm y\left(1-\frac{y}{2}\right)xF_3^{\nu,\bar{\nu}}(x)\right] \tag{12.101}$$

荷電対称演算 $(\exp(-i\pi I_y))$ で，$p\to -n$, $J^\pm\to -J^\mp$ になるので，

$$F_i^{\nu p}=F_i^{\bar{\nu}n},\quad F_i^{\bar{\nu}p}=F_i^{\nu n},\quad i=1,2,3 \tag{12.102}$$

が成立する．アイソスカラー標的 ($n_{\mathrm{p}}=n_{\mathrm{n}}$) に対しては，

$$F_i^{\nu}=(F_i^{\nu\mathrm{p}}+F_i^{\nu\mathrm{n}})/2=(F_i^{\bar{\nu}\mathrm{p}}+F_i^{\bar{\nu}\mathrm{n}})/2=F_i^{\bar{\nu}} \tag{12.103}$$

が成立するので，σ^{ν} と $\sigma^{\bar{\nu}}$ との差は F_3 の前の符号のみとなる．

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu,\bar{\nu}}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi}s\left[(1-y)F_2^{\nu}(x)+\left(\frac{y^2}{2}\right)2xF_1^{\nu}(x)\pm y\left(1-\frac{y}{2}\right)xF_3^{\nu}(x)\right] \tag{12.104}$$

(12.69) と比較すれば，F_3 の項は別として，

$$\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\longrightarrow\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi} \tag{12.105}$$

の置き換えをすれば，形の上では電子非弾性散乱の式から，ニュートリノ非弾性散乱の式が得られることがわかる．これは元の弱い相互作用ラグランジアンと 2 次の電磁相互作用等価ラグランジアンと比較すれば当然の話である．スピン 1/2 標的ならば電磁相互作用と同じく，カラン-グロスの関係式 ($2xF_1=F_2$) が成立するので，(12.104) は，

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi}s\left[\frac{(F_2+xF_3)}{2}+\frac{(F_2-xF_3)}{2}(1-y)^2\right] \tag{12.106 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\bar{\nu}}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi}s\left[\frac{(F_2+xF_3)}{2}(1-y)^2+\frac{(F_2-xF_3)}{2}\right] \tag{12.106 b}$$

と書き換えられる．ただし，ニュートリノ非弾性散乱に現れる F_i と電子散乱の F_i とは一般には違う量であることに注意しておく．しかし，もしパートンモデルが正しければ，電子の代わりにニュートリノをプローブにした場合でも構造関数は同じ分布関数で書け，電子非弾性散乱の構造関数とニュートリノ非弾性散乱構造関数との間に簡単な関係がつくはずである．そこで，電子散乱とニュートリノ散乱のデータの比較が重要となる．

12.7.2 ニュートリノ-クォーク散乱

a. 散乱断面積

弱い相互作用のラグランジアンは，

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}&=(G_{\mathrm{F}}/\sqrt{2})[\bar{u}\gamma_{\mu}(1-\gamma^5)d][\bar{\mu}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\nu]\\&=(4G_{\mathrm{F}}/\sqrt{2})(\bar{u}_{\mathrm{L}}\gamma_{\mu}d_{\mathrm{L}})(\bar{\mu}_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}\nu_{\mathrm{L}})\end{aligned} \tag{12.107}$$

で与えられるからニュートリノとクォーク散乱断面積には，eμ 散乱をヘリシティで分解した式 (第 5 章，(5.99)，(5.100)) がそのまま使える．

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{LL}}}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{CM}}=\frac{\alpha^2}{t^2}s,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{LR}}}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{CM}}=\frac{\alpha^2}{t^2}s\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 \qquad (12.108\,\mathrm{a})$$

において

$$\left(\frac{4\pi\alpha}{t}\right)^2 \longrightarrow \left(4\frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad (12.108\,\mathrm{b})$$

の置き換えと，$y=(1-\cos\theta)/2$ の変数変換を行い，ニュートリノはスピン平均をとらないことに留意すれば，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}s \qquad :(\nu\mathrm{q},\ \bar{\nu}\bar{\mathrm{q}}\ \text{散乱}) \qquad (12.109\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}s(1-y)^2 \qquad :(\bar{\nu}\mathrm{q},\ \nu\bar{\mathrm{q}}\ \text{散乱}) \qquad (12.109\,\mathrm{b})$$

が得られる．核子の中のクォークを相手にするときは，電子陽子非弾性散乱の場合と同じく，$s\to xs$ とし分布関数 $q_i(x)$ を掛けてやればよい．核子の中には反クォークもあるから，その分布関数を $\bar{q}_i(x)$ と書けば

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi}s\sum 2x[q_i(x)+\bar{q}_i(x)(1-y)^2] \qquad (12.110\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\bar{\nu}}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_{\mathrm{F}}^2}{2\pi}s\sum 2x[q_i(x)(1-y)^2+\bar{q}_i(x)] \qquad (12.110\,\mathrm{b})$$

(12.106) と比べて，

$$F_2{}^{\nu}=\sum 2x[q_i(x)+\bar{q}_i(x)] \qquad (12.111\,\mathrm{a})$$

$$xF_3{}^{\nu}=\sum 2x[q_i(x)-\bar{q}_i(x)] \qquad (12.111\,\mathrm{b})$$

を得る．

b. 価クォークと海クォーク

核子の中には核子の量子数を決めるクォーク（価クォーク；valence quark，陽子ならば uud）と，量子数が真空と同じ海クォーク（sea quark）が含まれている．海クォークは $\mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}$ よりなるから，(12.111) は，F_2 がクォーク全体を，F_3 がヴァレンスクォークを表すことを示している．陽子の中の u, d, s クォークの分布を $u(x), d(x), s(x)$ とすれば，荷電対称により，中性子の中の u, d, s クォークの分布は，$d(x), u(x), s(x)$ となる．核子の中の s クォークの存在やチャーム生成反応を考えなければ，ニュートリノとクォークの反応は電荷とレプトン数保存則により，

$$\nu_\mu+\mathrm{d}\longrightarrow \mu^-+\mathrm{u},\qquad \nu_\mu+\bar{\mathrm{u}}\longrightarrow \mu^-+\bar{\mathrm{d}}$$

$$\bar{\nu}_\mu+\mathrm{u}\longrightarrow \mu^+ +\mathrm{d},\qquad \bar{\nu}_\mu+\bar{\mathrm{d}}\longrightarrow \mu^+ +\bar{\mathrm{u}} \tag{12.112}$$

のみ許されるから，陽子標的（p）と中性子標的（n）の構造関数は

$$F_2{}^{\nu\mathrm{p}}=2x[d+\bar{u}]$$
$$F_2{}^{\nu\mathrm{n}}=2x[u+\bar{d}]$$

したがって，アイソスカラー標的のときは

$$F_2{}^{\nu}=(F_2{}^{\nu\mathrm{p}}+F_2{}^{\nu\mathrm{n}})/2=x[u+d+\bar{u}+\bar{d}] \tag{12.113 a}$$

$$\begin{aligned} xF_3{}^{\nu}&=x(F_3{}^{\nu\mathrm{p}}+F_3{}^{\nu\mathrm{n}})/2=x[u+d-\bar{u}-\bar{d}] \\ &=x[u_\mathrm{v}+d_\mathrm{v}] \end{aligned} \tag{12.113 b}$$

ただし，$u_\mathrm{v}, d_\mathrm{v}$ は価クォークの分布関数である．

(12.110) は

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^\nu}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_\mathrm{F}{}^2}{2\pi}sx[q(x)+\bar{q}(x)(1-y)^2] \tag{12.114 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\bar{\nu}}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_\mathrm{F}{}^2}{2\pi}sx[q(x)(1-y)^2+\bar{q}(x)] \tag{12.114 b}$$

ただし，この場合の $q(x)=u(x)+d(x)$, $\bar{q}(x)=\bar{u}(x)+\bar{d}(x)$

一方電子については (12.70) より，

$$F_2{}^{\mathrm{ep}}=x[(4/9)(u+\bar{u})+(1/9)(d+\bar{d})] \tag{12.115 a}$$

$$F_2{}^{\mathrm{en}}=x[(4/9)(d+\bar{d})+(1/9)(u+\bar{u})] \tag{12.115 b}$$

であるので，アイソスカラー標的に対しては，

$$F_2{}^{\mathrm{e}}=x[(5/18)(u+d+\bar{u}+\bar{d})] \tag{12.116}$$

となる．すなわち，クォークモデルが正しければ，アイソスカラー標的については，$F_2^\nu=\dfrac{18}{5}F_2^e$ が成立する．

c．加　算　則

核子の量子数をクォークモデルを使って書き直すと，次のようないろいろの加算則が成立する．s, $\bar{\mathrm{s}}$ クォークおよびグルーオンの寄与も考慮して考えることにすると，

バリオン数　: $B=1=\int\mathrm{d}x(1/3)[u-\bar{u}+d-\bar{d}+s-\bar{s}]$

$$=(1/3)\int\mathrm{d}x\, F_3(x)/x \tag{12.117 a}$$

$$\text{アイソスピン}：I=\frac{1}{2}=\int \mathrm{d}x\frac{1}{2}[u-d-\bar{u}+\bar{d}]$$

$$=\int \mathrm{d}x\frac{1}{2}[u_\mathrm{v}-d_\mathrm{v}] \tag{12.117 b}$$

$$\text{電荷}\qquad：Q=1=\int \mathrm{d}x[(2/3)(u-\bar{u})-(1/3)(d-\bar{d}+s-\bar{s})]$$

$$=\int \mathrm{d}x[(2/3)u_\mathrm{v}-(1/3)(d_\mathrm{v}+s-\bar{s})] \tag{12.117 c}$$

$$\text{ストレンジネス}：S=0=-\int \mathrm{d}x[s-\bar{s}] \tag{12.117 d}$$

また，(12.115) より

$$\int \mathrm{d}x\frac{F_2{}^{\mathrm{ep}}-F_2{}^{\mathrm{en}}}{x}=\frac{1}{3}\int \mathrm{d}x[(u_\mathrm{v}-d_\mathrm{v})+2(\bar{u}-\bar{d})] \tag{12.118}$$

が成立する．海クォークについて $SU(3)$ 対称を仮定すると，$\bar{u}(x)=\bar{d}(x)=\bar{s}(x)$ $(=s(x))$ であるので，(12.117 b) と合わせて，

$$U\equiv\int \mathrm{d}x\frac{F_2{}^{\mathrm{ep}}-F_2{}^{\mathrm{en}}}{x}=\frac{1}{3} \tag{12.119}$$

が導ける．これらの式は全部が独立ではなく，西島-ゲルマンの法則で結びついている．

グルーオンとクォークのもつ総運動量は陽子の運動量に等しいから，グルーオンの運動量分布関数を $g(x)$ とすると

$$1=\int x\mathrm{d}x[\Sigma q_i(x)+g(x)] \tag{12.120}$$

しかしグルーオンは電子やニュートリノとは反応しないから，(12.120) に現れるクォークの全運動量の和は，

$$P_\mathrm{q}=\int x\Sigma q_i(x)\mathrm{d}x=1-\int xg(x)\mathrm{d}x<1 \tag{12.121}$$

(12.117 a) は Gross-Llewellyn-Smith の加算則 (sum rule)[13] として，(12.117 c) は Adler の加算則[14] として，(12.119) は Gottfried[15] の加算則として知られている．これらの検証は，$x\sim0$ 付近の精密データが必要であるのでそれほどやさしくはない．実験的には $x=0.003\sim0.8$ くらいまで測定されていて，$B\sim0.9\pm0.2$，$U\sim0.227\pm0.016$ が得られるので，GLS, Gottfried 加算法則はほぼ成立しているといってよい．

12.7.3　実験データとの比較

a.　全断面積

(12.114) を x, y で積分すると，

$$\sigma^{\nu}{}_{\mathrm{TOT}}=\sigma_0(Q+\overline{Q}/3)$$

$$\sigma^{\bar{\nu}}{}_{\mathrm{TOT}}=\sigma_0(Q/3+\overline{Q}) \tag{12.122}$$

$$\sigma_0=G_{\mathrm{F}}{}^2 s/2\pi, \qquad Q=\int xq(x)\mathrm{d}x, \quad \overline{Q}=\int x\bar{q}(x)\mathrm{d}x \tag{12.123}$$

となる．つまり，ブヨルケン・スケーリングの帰結としてニュートリノ反応の全断面積は，ニュートリノ入射エネルギーに比例して増加するという結果

$$\sigma^{\nu,\bar{\nu}}{}_{\mathrm{TOT}}\propto s=2M\omega \tag{12.124}$$

が得られる．実験値を図12.16にまとめた．実験値は現在[16] $\sigma^{\nu,\bar{\nu}}{}_{\mathrm{TOT}}=\alpha^{\nu,\bar{\nu}}\omega$ (GeV) として，

$$\alpha^{\nu}=0.67\times10^{-38}\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{GeV} \tag{12.125 a}$$

$$\alpha^{\bar{\nu}}=0.34\times10^{-38}\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{GeV} \tag{12.125 b}$$

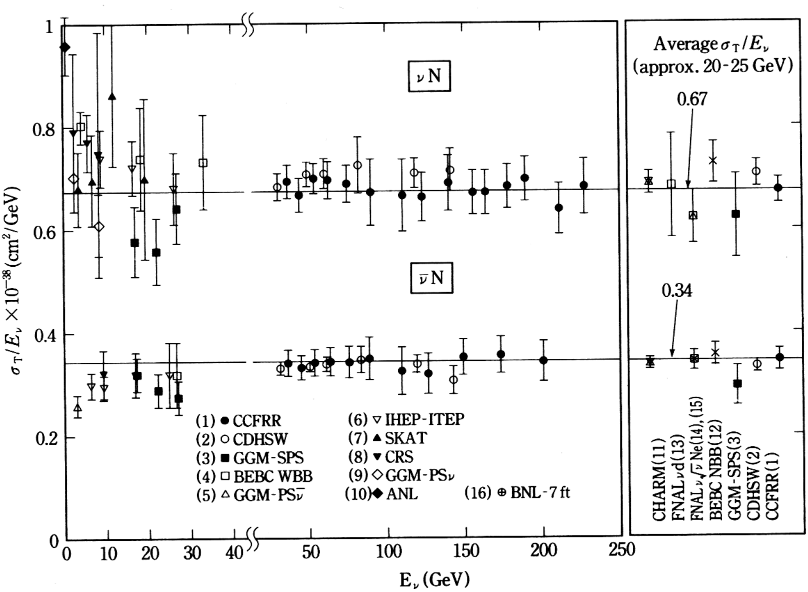


図 12.16　ニュートリノ全断面積 $\sigma_{\mathrm{T}}/E_{\nu}$[16]
右側の図は各グループによる $\sigma_{\mathrm{T}}/E_{\nu}$ の平均値．

で，理論の予測を裏付けている．

$\sigma \propto \omega$ が破れるとすればその理由は，① 弱い相互作用の高次効果または W の質量の影響，② パートンモデルが悪い (QCD 補正) などが考えられるが，ニュートリノ実験の可能な最高エネルギー $\omega \lesssim 400$GeV では，まだズレはみられない．

b．反クォーク成分

$\beta \equiv \bar{Q}/(Q+\bar{Q})$ を反クォークの含まれる割合とすれば，

$$R \equiv \frac{\sigma^{\bar{\nu}}{}_{\mathrm{TOT}}}{\sigma^{\nu}{}_{\mathrm{TOT}}} = \frac{Q+3\bar{Q}}{3Q+\bar{Q}} = \frac{\alpha^{\bar{\nu}}}{\alpha^{\nu}} = 0.51 \tag{12.126}$$

から，$\beta = 0.175$ と求められる*7)

c．$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}/\mathbf{d}\boldsymbol{y}$

(12.114) を x で積分すると

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{\nu}}{\mathrm{d}y} = \sigma_0[Q+\bar{Q}(1-y)^2] \tag{12.127 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{\bar{\nu}}}{\mathrm{d}y} = \sigma_0[Q(1-y)^2+\bar{Q}] \tag{12.127 b}$$

$Q \gg \bar{Q}$ の近似では

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{\nu}}{\mathrm{d}y} \sim 1, \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma^{\bar{\nu}}}{\mathrm{d}y} \sim (1-y)^2 \tag{12.128}$$

となる．νq, $\bar{\nu}$q 散乱は，$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}y \sim 1, (1-y)^2$ であった ((12.109) 参照) ことを思い起こせば，ニュートリノと点粒子つまりパートンとの相互作用の形がそのままニュートリノ核子散乱に現れることになる．実際のデータを図 12.17[12)]に示す．(12.128) はほぼ成立しているといってよいが，$y \approx 1$ 付近で (12.128) 式からのズレがわずかにあり，$\bar{q}(x) \neq 0$ であることの影響がみられる．

d．分布関数とクォークの電荷

パートンモデルに従えば構造関数 F_i は，クォークの運動量分布関数であり，(12.113) と (12.116) で表されるので，電子散乱とニュートリノ散乱の分布関数は比例するはずである．

---

*7)　厳密には分布関数は運動量遷移 Q^2 とは独立ではなく，Q^2 が変わると分布関数の形もまた変わる．Q の最大値はエネルギー E_ν により変わるから，β もまたエネルギーにより変わるが，ここではその効果は無視する．

また絶対値の比は，パートンがクォークならば5/18となるべき量である．図12.18に電子散乱で得られたものとの比較を示す．データとの一致は非常によくパートンはクォークであるとの考えを支持する[17]．

その後深非弾性散乱のみならず電子陽電子消滅反応，$\pi^0 \to 2\gamma$ など種々の物理量がパートンモデルでよく説明されることがわかった．このときすべてのデータを説明できる整数電荷のパートンモデルは存在しえないこと，しかし

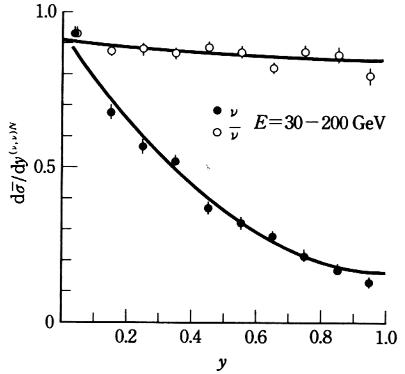


図 12.17　$d\sigma/dy$ の実験データとパートンモデルによる計算値[12)]
わずかの反クォーク成分によるズレを除くと $[d\sigma^{\nu}/dy]\sim 1$, $[d\sigma^{\bar{\nu}}/dy]\sim(1-y)^2$ によく一致している．

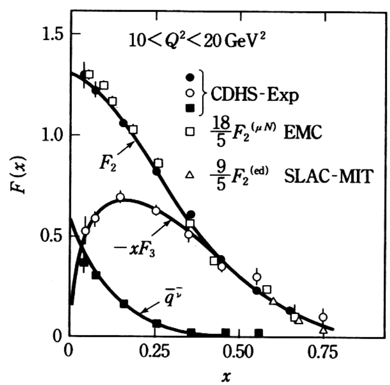


図 12.18　電子とニュートリノ散乱による構造関数の比較[17)]
$F_2(x)=q(x)+\bar{q}(x)$, $-xF_3(x)=q(x)-\bar{q}(x)$, $\bar{q}(x)$ をプロットする．●○■はニュートリノデータで，□は μp 散乱，△は eD 散乱で得られた $F_2(x)$ にそれぞれ 18/5 と 9/5 を掛けたもの．

クォークモデルについてはすべての場合にデータと両立することがその後議論された[18)]．こうしてパートンとはクォークそのものであることが疑いなく実証されたのである．

e.　グルーオンの存在

クォークと反クォークの担う全運動量は Q および，$\bar{Q}$ で与えられる．(12.122)，(12.125) から，

$$Q+\bar{Q}=\frac{3\pi}{4G_F{}^2\omega M}(\sigma^{\nu}{}_{\mathrm{TOT}}+\sigma^{\bar{\nu}}{}_{\mathrm{TOT}})=0.5\pm 0.04 \qquad (12.129)$$

は，クォークの担う全運動量である．電子散乱から得られる運動量分布も同一

であるから，核子の中には電磁相互作用も弱い相互作用もしない粒子が存在することになる．これはクォーク間の力の原因となるグルーオンと考えられる．核子の中では，グルーオンは半分の運動量を担っている．つまり核子内にはクォークのみが存在するのではなく，グルーオンもまた定常的に存在する．以下では，パートンとはクォークとグルーオンのことを意味するものとする．

12.8　パートンモデルの他過程への応用

12.8.1　*R*　値

電子陽電子衝突反応でハドロンが生成される場合を考える．ハドロンはクォークの複合体であるからハドロン生成はクォーク生成と同等である．いったん生成されたクォークは 100％の確率でハドロン化するとすれば，ハドロンの生成全断面積はクォーク対生成断面積をあらゆるクォークの種類について足し上げたものに等しいはずである．

$$\sigma(\mathrm{e^-e^+} \to \text{ハドロン}) = \sum\sigma(\mathrm{e^-e^+} \to \mathrm{q}_i\bar{\mathrm{q}}_i)$$

生成過程においては 1γ 中間状態のみが効くとすれば，クォーク対生成断面積は，μ 対生成断面積から，クォークの電荷 λ_i と色の自由度を考慮することによりただちに得られる．したがって次式で定義される R 値は

$$R \equiv \frac{\sum\sigma(\mathrm{e^-e^+} \to \mathrm{q}_i\bar{\mathrm{q}}_i)}{\sigma(\mathrm{e^-e^+} \to \mu\bar{\mu})} = N_\mathrm{c}\sum\lambda_i^2, \qquad N_\mathrm{c}=3 \tag{12.130}$$

というクォークの電荷で決まる値をとる．c クォーク生成のしきい値以下の低エネルギー領域では

$$R=3[(2/3)^2+(-1/3)^2+(-1/3)^2]=2, \qquad q_i=\mathrm{u, d, s}$$

c のしきい値以上 b クォークのしきい値以下では，

$$R=\cdots\cdots+3(2/3)^2=10/3, \qquad q_i=\mathrm{u, d, s, c}$$

b クォークのしきい値以上のエネルギー領域では

$$R=\cdots\cdots+3(-1/3)^2=11/3, \qquad q_i=\mathrm{u, d, s, c, b}$$

の値をとるはずである．ただし色の自由度を考え 3 を掛けてある．図 9.7 は R 値をエネルギー $\sqrt{s}$ の関数として描いたもので[19)]，この予言が各クォークのしきい値を十分超えたところではよくあっている．

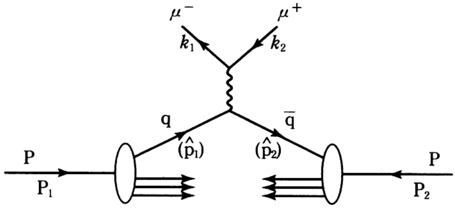


図 12.19　ドレル-ヤン過程
$p\bar{p} \to \mu^-\mu^+ + X$ を $q\bar{q} \to \gamma^* \to \mu^-\mu^+$ と考える.

12.8.2　ドレル-ヤン過程

陽子（またはハドロン）と陽子の衝突でミューオン対を生成する過程

$$\mathrm{p}\,(\mathrm{or}\ \pi\ \mathrm{or}\ \bar{\mathrm{p}}) + \mathrm{p} \longrightarrow \mu^+ + \mu^- + \mathrm{X} \tag{12.131}$$

をドレル-ヤン（Drell-Yan）過程という. X はたくさんのハドロンを意味する. 信号としてレプトン対を拾い出すので実験的には比較的容易に得られる反応である. パートンモデルで考えるならば, この過程は陽子 1 の中のクォーク 1（運動量 x_1P_1）と陽子 2 の中の反クォーク 2（運動量 x_2P_2）が対消滅して, フォトンに転化し, フォトンがミューオン対に壊れるという想定である（図 12.19）. ミューオン対の実効質量を m, エネルギー運動量を q とし, パートンの質量と横運動量を無視すれば, 2 陽子の重心系では,

$$x_1P_1 \simeq x_1(E\,;0,0,P) \tag{12.132 a}$$

$$x_2P_2 \simeq x_2(E\,;0,0,-P) \tag{12.132 b}$$

$$q = x_1P_1 + x_2P_2 = ((x_1+x_2)E\,;0,0,(x_1-x_2)P) \tag{12.132 c}$$

であるので,

$$m^2 = q^2 = (x_1+x_2)^2E^2 - (x_1-x_2)^2P^2 \simeq 4x_1x_2E^2 = x_1x_2s \equiv \tau s \tag{12.133}$$

$q\bar{q}$ 対が μ 対になる断面積は,（5.107）式

$$\sigma(e^-e^+ \to \mu\bar{\mu}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \tag{12.134}$$

で e^-e^+ を $q\bar{q}$ で置き換えればよい. すなわち, クォークの電荷 λ_q と色の自由度を補正し, かつ $s \to m^2$ として得られる. クォークの色には R, G, B の3種類あるが, μ 対は無色であるから, $R\bar{R}, G\bar{G}, B\bar{B}$ の組み合わせのみ許される. 各色は平均して 1/3 の確率で存在するから, カラー因子 $(1/3)^2 \times 3 = 1/3$ が掛

かる．また各クォークおよび反クォークが核子の中で運動量 x_1, x_2 をもつ確率は $q(x_1), \bar{q}(x_2)$ に比例するとすれば，

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}^2\sigma(\mathrm{pp}\to\mu\bar{\mu}+x)\\&=\frac{4\pi\alpha^2}{9m^2}\sum\lambda_i^2[q_i(x_1)\bar{q}_i(x_2)+q_i(x_2)\bar{q}_i(x_1)]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\end{aligned}\tag{12.135}$$

x_1, x_2 の代わりに直接の観測量 m^2, $x_\mathrm{F}=x_1-x_2=\pm2|\boldsymbol{q}|/\sqrt{s}$（$\boldsymbol{q}$ は μ 対が $\bar{\mathrm{p}}\mathrm{p}$ 重心系でもつ運動量）を使えば*8)，

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\frac{\mathrm{d}m^2\mathrm{d}x_\mathrm{F}}{(x_1+x_2)s}\tag{12.136}$$

であるので

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}m^2\mathrm{d}x_\mathrm{F}}=\frac{4\pi\alpha^2}{9m^2s}\sum\frac{\lambda_i^2[q_i(x_1)\bar{q}_i(x_2)+q_i(x_2)\bar{q}_i(x_1)]}{(x_1+x_2)}\tag{12.137}$$

となる．$\tau\equiv m^2/s=x_1x_2$ という変数で書き直した，

$$\begin{aligned}s^2\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}m^2\mathrm{d}x_\mathrm{F}}&=\frac{4\pi\alpha^2}{9\tau^2}\frac{x_1x_2}{(x_1+x_2)}\\&\quad\times\sum\lambda_i^2[q_i(x_1)\bar{q}_i(x_2)+q_i(x_2)\bar{q}_i(x_1)]\end{aligned}\tag{12.138}$$

もよく使われる．x_1, x_2 は，観測量 τ, x_F から計算できる．

$$x_1=(\sqrt{4\tau+x_\mathrm{F}^2}+x_\mathrm{F})/2\tag{12.139 a}$$

$$x_2=(\sqrt{4\tau+x_\mathrm{F}^2}-x_\mathrm{F})/2\tag{12.139 b}$$

(12.138) の重要な点は，深非弾性散乱で決められたクォークの分布関数がそのまま使えるところにある．ただし，パートンモデルが適用できる運動学領域を適当に設定する必要はある．パートンモデルの成立するのは，堅い反応すなわち，反応に関与したエネルギーと運動量遷移が十分大きくパートン自身のエネルギーも 1 GeV を超えるようなところである．電子やニュートリノ非弾性散乱の経験から，$x\gtrsim1/E(\mathrm{GeV})$ ならば安全であろう．そのような条件下で，(12.137) 式を $x_\mathrm{F}=0\,(x_1=x_2=\sqrt{\tau})$ のところでみると，

$$sm^2\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}m^2\mathrm{d}x_\mathrm{F}}\bigg|_{x_\mathrm{F}=0}=\frac{2\pi\alpha^2}{9\sqrt{\tau}}\sum\lambda_i^2[q_i(\tau)\bar{q}_i(\tau)+q_i(\tau)\bar{q}_i(\tau)]\tag{12.140}$$

であるので，分布関数の積を直接 $x=\tau$ のところで観測できる．

$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}m^2$ を得るには (12.137) を積分すればよいが，(12.135) に戻り

---

*8) x_F はしばしばファインマンの x と呼ばれる．

$$1=\delta(m^2-x_1x_2s)\mathrm{d}m^2 \tag{12.141}$$

を使い，積分の順序を交換すれば

$$m^4\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}m^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{9}\tau\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}(\tau) \tag{12.142}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}(\tau)=\int\sum\lambda_i{}^2\delta(x_1x_2-\tau)[q_i(x_1)\bar{q}_i(x_2)+q_i(x_2)\bar{q}_i(x_1)]\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_2 \tag{12.143}$$

この式によれば，左辺は，$\tau=m^2/s$ を一定にしておけばエネルギーによらないこと，つまりスケーリングが成立することを示している．図12.20 (a) は実験データを示す[20]．パートンモデルの予言はよくあっている．また，ドレル-ヤン反応は $q\bar{q}\to\mu\bar{\mu}$ という仮定なので，角分布は ee$\to\mu\bar{\mu}$ と同じつまり μ 対の重心系で，$\sim(1+\cos^2\theta)$ になるはずであるがこれもよくあっている（図12.20 (b)）[21]．ただし，分布関数や角分布はよく再現するものの絶対値のスケールは少しずれていて，この差は K 因子と呼ばれる．

$$K=\frac{(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}m^2)_{\mathrm{exp.}}}{(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}m^2)_{\mathrm{theor.}}} \tag{12.144}$$

実験によれば[20]，このエネルギー変数領域で $K\sim1.6$ であり，QCD の高次補正効果と考えられている．

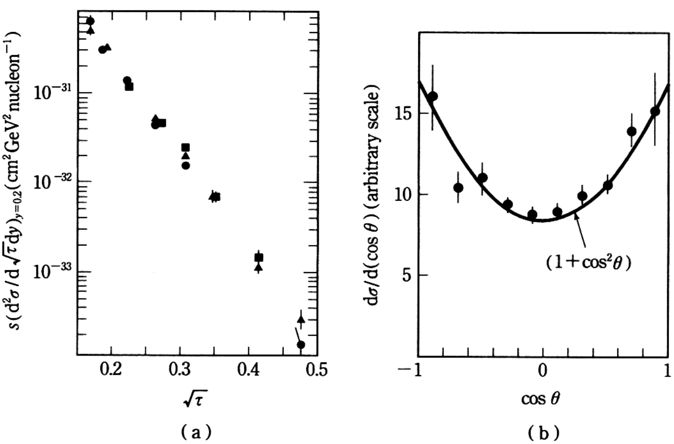


図 12.20　ドレル-ヤン過程

(a)　$s\left(\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\sqrt{\tau}\,\mathrm{d}y}\right)$ vs $\sqrt{\tau}$

スケーリングが成立している．データは 200 GeV (■)，300 GeV (▲)，400 GeV (●) を示す[20]．y はラピディティである．

(b)　$\mu^+\mu^-$ の角分布．$q\bar{q}\to\mu\bar{\mu}$ に特有の $1+\cos^2\theta$ 分布を示す[20]．

12.8.3　ハドロン衝突におけるパートンモデル

ドレル-ヤン過程の考察を一般のパートン素過程に拡張するのは容易である．いまハドロンAとハドロンBとが衝突してパートンまたはレプトン(c)を放出する包含反応を考えよう．

$$A+B \longrightarrow c+X \tag{12.145}$$

この反応断面積は，ハドロンAの中のパートンaとハドロンBの中のパートンbとの反応断面積 $\hat{\sigma}(ab\to cX)$ に，縦運動量 x_a (x_b) のパートン a (b) が，ハドロン A (B) の中にみつかる確率 $f_A{}^a(x_a)dx_a$ と $f_B{}^b(x_b)dx_b$ を掛けて得られる．

$$\sigma(AB\to cX)=\int dx_a dx_b \{f_A{}^a(x_a)f_B{}^b(x_b)+(A\leftrightarrow B \text{ if } a\neq b)\}\hat{\sigma}(ab\to cX) \tag{12.146}$$

ここに $\hat{\sigma}$ はパートン素過程の断面積を表し，始状態のカラーについては平均を，終状態のカラーについては和をとってあるものとする．パートン ab 系の全エネルギーを $\hat{s}$ とすると

$$\hat{s}=x_a x_b s=\tau s \tag{12.147}$$

であるので，(12.142) に対応する式は

$$\frac{d\sigma}{d\tau}(AB\to cX)=\frac{dL_{ab}}{d\tau}(\tau)\hat{\sigma}(ab\to cX;\hat{s}=\tau s) \tag{12.148}$$

ここで

$$\frac{dL_{ab}}{d\tau}(\tau)=\int dx_a dx_b \delta(x_a x_b-\tau)\{f_A{}^a(x_a)f_B{}^b(x_b)+(A\leftrightarrow B \text{ if } a\neq b)\} \tag{12.149}$$

はパートンのルミノシティと呼ばれる量である．観測量としては ab 系の縦運動量 $2|\boldsymbol{q}|/\sqrt{s}=x_F=x_a-x_b$ のほかに，ラピディティ η もよく使われる．

a, b 系のもつエネルギー E_{ab}，運動量 P_{ab} は

$$E_{ab}=x_a E+x_b E=(x_a+x_b)E$$

$$P_{ab}=x_a P+x_b P\simeq(x_a-x_b)E$$

であるので

$$\eta=\frac{1}{2}\ln\frac{(E_{ab}+P_{ab/\!/})}{(E_{ab}-P_{ab/\!/})}=\frac{1}{2}\ln\frac{x_a}{x_b} \tag{12.150}$$

x_a, x_b は，τ, x_F がわかっているときは (12.139) から求められるが，τ と η が

わかっているときは

$$x_a = \sqrt{\tau}\,e^{+y}, \qquad x_b = \sqrt{\tau}\,e^{-y} \tag{12.151}$$

を使ってもよい．ラピディティを使えば，

$$\frac{d^2\sigma}{d\eta d\tau} = \frac{d^2\sigma}{dx_a dx_b} = \{f_A{}^a(x_a) f_B{}^b(x_b) + (A \leftrightarrow B \ \mathit{if} \ a \neq b)\}\hat{\sigma} \tag{12.152}$$

これらの式はハドロンコライダーでの W, Z やジェット生成パートン反応断面積の計算に用いられる．

参 考 文 献

1) J.B. Bellicard *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967) 527
2) E.B. Hughs *et al.*: *Phys. Rev.*, **B139** (1965) 458
J.R. Dunning *et al.*: *Phys. Rev.*, **141** (1966) 1286
3) J.I. Friedman and H.W. Kendall: *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **22** (1972) 203
4) M. Bleidenbach *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **23** (1969) 935
5) J.D. Bjorken: *Phys. Rev.*, **179** (1969) 1547
6) M.S. Chen and P. Zerwas: *Phys. Rev.*, **D12** (1975) 187
S. Brodsky, T. Kinoshita and H. Terazawa: *Phys. Rev.*, **D4** (1971) 1532
7) V.M. Budnev *et al.*: *Phys. Rep.*, **C15** (1975) 181.
8) F. Gilman: *Phys. Rev.*, **167** (1968) 1363
9) L. Hand: *Phys. Rev.*, **129** (1963) 1834
10) C.G. Callan and D. Gross: *Phys. Rev. Lett.*, **22** (1969) 156
11) CDHS; P. Berge *et al.*: *Z. Phys.*, **C49** (1991) 187
12) CDHS; de Groot *et al.*: *Z. Phys.*, **C1** (1979) 143
13) D.J. Gross and C.H. Llewellyn-Smith: *Nucl. Phys.*, **B14** (1969) 337
14) S. Adler: *Phys. Rev.*, **143** (1966) 1144
15) Gottfried: *Phys. Rev. Lett.*, **18** (1967) 1174
16) PDG; Review of Particle Properties, *Phys. Rev.*, **45** (1992), **54** (1996)
17) CDHS; H. Abramowicz *et al.*: *Z. Phys.*, **C17** (1983) 283
18) H. Kuhnelt and O. Nachtmann: *Nucl. Phys.*, **B88** (1975) 41
19) TASSO; M. Althoff *et al.*: *Z. Phys.*, **C22** (1984) 307
20) E605; C.N. Brown *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 2637
21) K.J. Anderson *et al.*: Proc. 19th Int. Conf. on High Energy Phys., Tokyo, 1978
22) M. Han and Y. Nambu: *Phys. Rev.* **1398** (1965) 1006
23) D. Gross and F. Wilczek: *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973) 1343
H. D. Politzer: *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973) 1346

13
統 一 理 論

われわれは，第8，9章でハドロンの性質がクォークモデルで説明できることを学び，クォークがグルーオンとともにパートンとしてハドロンの中に実在することを第12章で学んだ．クォークにはどうやらカラー力が働くらしい．カラー自由度のもつ対称性は $SU(3)$ である．一方，第10章では弱い相互作用が V-A 型であり，クォークとレプトンからつくられる荷電カレントに，力の媒介粒子 $\mathrm{W}^{\pm}$ が結合すると考えて説明できることを学んだ．$\mathrm{W}^{\pm}$ に中性の W^{0} を加えればアイソスピン（$SU(2)$）対称性を満たす可能性があること，$\mathrm{W}^{\pm}$ はフォトンと同じくベクトル場であること，電磁カレントはアイソスピンカレントを含み弱い相互作用と一部分を共有しているなど，弱い相互作用がQEDと同じ数学的枠組みに従う可能性が非常に強いことが示唆された．QEDが $U(1)$ 対称性に基づくゲージ理論であることを考えると，弱い相互作用や強い相互作用もやはりゲージ理論に従うと考えるのが最も自然である．そこでまず，$U(1)$ ゲージ対称性がどのように $SU(2)$ や $SU(3)$ 対称性に拡張できるかを探り，一般的なゲージ理論をうちたてる．そして，強い相互作用理論としてのQCD，電磁相互作用と弱い相互作用を統一して電弱理論の出発点となるラグランジアンを組み立てて，本書の締めくくりとする．

13.1 ゲ ー ジ 原 理

弱相互作用はアイソスピンカレントが源になるとすれば，$SU(2)$ 対称性をもつ場のゲージ理論をつくらねばならない．これは1954年にヤン-ミルズにより行われた[1)]．詳細は次節で議論するが，その前に，まず手本としてのフェル

ミオン場とフォトンのQEDを考えてみよう．ラグランジアンが次の第1種(または大域的) ゲージ変換

$$\psi \longrightarrow e^{-i\alpha}\psi, \qquad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}e^{i\alpha} \tag{13.1}$$

で不変であることからネーター（保存）カレントが定義され，

$$j_{\mathrm{EM}}{}^{\mu}=q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \qquad \partial_{\mu}j_{\mathrm{EM}}{}^{\mu}=0 \tag{13.2 a}$$

保存カレントの第0成分の空間積分として，保存量である電荷演算子が定義される（第4章「場の量子化」参照）．

$$Q=e\int\bar{\psi}\gamma^{0}\psi\,\mathrm{d}^{3}\mathrm{x} \tag{13.2 b}$$

一方，保存カレントに結合するゲージ場 A^{μ}（フォトン）の満たすマクスウェルの方程式は，

$$A^{\mu} \longrightarrow A'^{\mu}=A^{\mu}+q\partial^{\mu}\alpha(x) \tag{13.3}$$

というゲージ変換に対して不変である．(13.1) に現れる α は，任意のパラメターではあるが定数であるのに対し，(13.4) のゲージパラメター α は時空の関数である．自由場の ψ はディラック方程式を満たすが，α を時空 x の関数とすると（第2種のゲージ変換また局所ゲージ変換），

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x)=e^{-i\alpha(x)}\psi(x) \tag{13.4}$$

ゲージ変換された ψ' はもはやもとの運動方程式を満たさない．しかし，電磁場と結合している ψ は，ラグランジアンが，

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}+iqA_{\mu})\psi-m\bar{\psi}\psi \tag{13.5}$$

という形をしているので，ψ の局所ゲージ変換パラメターの $\alpha(x)$ とフォトン場のゲージ変換の $\alpha(x)$ を同一関数として，フォトン場も同時にゲージ変換をしてやれば，運動方程式の形は変わらない．つまり，力の場が微分演算子 ∂_{μ} を

$$\partial_{\mu} \longrightarrow D_{\mu}=\partial_{\mu}+iqA_{\mu} \tag{13.6}$$

置き換えた形で入っているときは，運動方程式は，フェルミオン場と力の場を同時に，局所ゲージ変換しても不変である．(13.6) 式を共変微分という．この事実は，電磁相互作用についてミニマム相互作用という名で昔から知られていたことであるが，これを原理とするのがゲージ理論である．すなわち，ゲージ原理とは，簡単に言えば

[運動法則は局所ゲージ変換で不変である]

である．もう少し詳しく記述すると，対象とする場のラグランジアンが局所ゲージ変換で不変であるとき，対応する保存量を源とする力の場との相互作用は，微分を共変微分で置き換えることにより得られる．このときの力の場をゲージ場という．保存量は大局的ゲージ変換のみでも得られるので，保存量がすべて力の源泉となるとは限らないが，保存量を生むゲージ変換を局所化して同時にゲージ場を導入し，相互作用する体系をつくることをゲージ化するという．今日では，ゲージ対称性に基づく保存量，すなわち力の源泉となる保存量(電荷やエネルギー運動量など) のみが厳密な保存量と考えられており，他の保存量は現象的なもので，本当の保存量である保証はないと考えられている．例えば，バリオン数，レプトン数などの保存則は，非常な高エネルギーでの現象を扱う大統一理論では破れている．

13.2 非可換ゲージ理論[1)]

二つのユニタリー変換を続けて行ったものもまた一つのユニタリー変換であるが，順序により違う変換になるとき，すなわち二つの変換が交換しないとき非可換 (非アーベル) 変換という．典型的な例は $SU(2)$ 変換である．そこで，$SU(2)$ 対称性をもつ場合のゲージ理論を議論する．一般の非可換ゲージ対称性についてもほとんど同様な議論が成立する．運動方程式が $SU(2)$ 対称性をもつとき，場 ψ の次の変換で

$$\psi \longrightarrow \psi' = \exp(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{t})\psi \tag{13.7 a}$$

$$[t_i, t_j] = i\varepsilon_{ijk}t_k \tag{13.7 b}$$

ラグランジアンは不変である．α は3個のパラメター，ψ は一般に N 行1列の列ベクトル (アイソスピン多重項) である．$t_k\,(k=1, 2, 3)$ は $SU(2)$ 変換の生成子で (13.7 b) の代数を満たし，無軌跡の $N\times N$ アイソスピン表現行列として表される*[1)]．以下， 特に断らない限り $N=2$ (アイソスピン2重項) とし

*1) 一般の $SU(n)$ 変換では，独立な生成子の数は n^2-1 個あり，ε_{ijk} を f_{ijk} で置き換えた (13.7 b) 式を満たす．f_{ijk} は添字 ijk について完全反対称な定数の組で $SU(n)$ 変換の構造定数と呼ばれる．変換の構造はこの構造定数を与えれば一義的に決まる．

て考察を進める．このときパウリの行列 τ_k を用いて $t_k=\tau_k/2$ と表される．このネーターカレントがアイソスピンカレント

$$j_k{}^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu t_k\psi, \qquad k=1,2,3 \tag{13.8}$$

である．これから保存量アイソスピン I_k が定義されるが，同時対角化可能なのは，$I^2=I_1{}^2+I_2{}^2+I_3{}^2$ と I_3 である．変換には 3 個のパラメターがあるので，局所ゲージ変換でラグランジアンを不変とするためには，3 個のゲージ場 $\mathrm{W}_k{}^\mu$ を必要とする．共変微分を

$$D_\mu=\partial_\mu+ig\sum_k W_{k\mu}t_k=\partial_\mu+ig\boldsymbol{W}_\mu\cdot\boldsymbol{t} \tag{13.9}$$

で定義すると，W と ψ との結合は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{INT}}=-g\bar{\psi}\gamma^\mu\boldsymbol{W}^\mu\cdot\boldsymbol{t}\psi=-\frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu[\sqrt{2}(W^+\tau_++W^-\tau_-)+W^0\tau_3]\psi \tag{13.10 a}$$

$$W^\pm=(W_x\mp iW_y)/\sqrt{2}, \qquad \tau_\pm=(\tau_x\pm i\tau_y)/2 \tag{13.10 b}$$

と表され，アイソスピン独立な相互作用を再現する．ゲージ場 W_k の受けるゲージ変換はゲージ原理を満たすように決める．ゲージ変換行列を U，変換された量をダッシュ（′）付きで表すと，局所ゲージ不変性

$$(D_\mu\psi)'=U(D_\mu\psi)=D_\mu'\psi'=D_\mu'(U\psi) \tag{13.11}$$

から，変換性が決められる．すなわち，

$$D_\mu'=UD_\mu U^{-1} \tag{13.12 a}$$

$$W_\mu'=UW_\mu U^{-1}-(i/g)U\partial_\mu U^{-1} \tag{13.12 b}$$

ここで，U として微小変換（α を微小量とする）をとり，α の 1 次まで展開すると

$$W_{k\mu}'=W_{k\mu}+\varepsilon_{kji}\alpha_j W_i+\partial_\mu\alpha_k \tag{13.13 a}$$

アイソスピン空間のベクトルで表せば

$$\boldsymbol{W}_\mu'=\boldsymbol{W}_\mu+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{W}+\partial_\mu\boldsymbol{\alpha} \tag{13.13 b}$$

この第 2 項が，QED すなわち $U(1)$ ゲージ理論にはなく，非可換ユニタリー変換に伴う新しい項である．この項は，W がゲージ変換で回転することを示している．すなわち，W は $SU(2)$ 変換を受ける物理量で，独自のアイソスピンをもつ．アイソスピンが力の源であるから，W 自身が力を受けること，場の量子論でいえば W 自身が W を放出できること，すなわち自己相互作用をもつことを示す．

場 $F_{W\mu\nu}$ や W^{μ} の従う方程式を導くには次のように考える．ゲージ場中では空間が歪んでいると考え，微分幾何学における平行移動の概念を導入するのである．歪んでいる空間での微分（共変微分）は，接続係数を使って ψ を時空の x^{μ} 方向に微小平行移動させた

$$\psi(x^{\mu}+\mathrm{d}x^{\mu}) \longrightarrow \psi_{/\!/}(x^{\mu}+\mathrm{d}x^{\mu}) \equiv \psi(x^{\mu}+\mathrm{d}x^{\mu})+iqA_{\mu}\mathrm{d}x^{\mu}\psi$$

と元の ψ との差を，微小移動距離 $\mathrm{d}x^{\mu}$ で割って得られる．この考え方を採用すれば，可換ゲージ場の共変微分 (13.6) を再現でき，かつ非可換ゲージ場への拡張が容易となる．この場合ゲージ場は歪んだ空間での接続係数という意味づけをもつ．ただし，非可換変換の場合第 2 項は非可換項であるので，2 回以上動かすときは道筋を注意深く選ばなければならない．QED の場合，ψ を微小ループ（図 13.1 a）に沿って 4 回平行移動させて元に戻すと，

$$\oint(\psi+iqA_{\mu}\psi)\mathrm{d}x^{\mu} \sim iqF_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}\psi \qquad (13.14\,\mathrm{a})$$

という式によって電磁場が得られたと同様に考えて

$$\oint(\psi+ig\boldsymbol{W}_{\mu}\cdot\boldsymbol{t}\psi)\mathrm{d}x^{\mu} \qquad (13.14\,\mathrm{b})$$

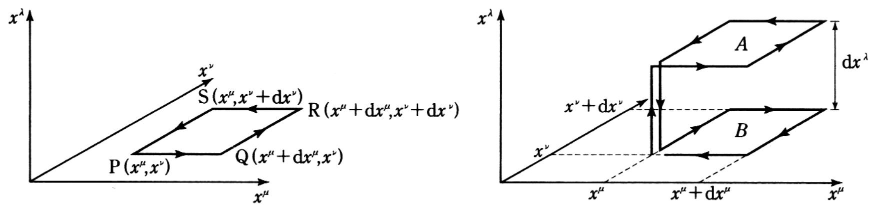
を $ig\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}\psi$ に等しいと置く．その結果

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu}-\partial_{\nu}\boldsymbol{W}_{\mu}-g\boldsymbol{W}_{\mu}\times\boldsymbol{W}_{\nu} \qquad (13.15)$$

を得る．これらの $F_{\mu\nu}$ は歪んだ空間の曲率と解釈できる量である．同様に，図 13.1 b のループに沿って動かせば，$\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ の共変微分 $D_{\lambda}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ が得られる．結果のみ記すと，ゲージ場 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ の従う運動方程式は，

$$D_{\mu}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}=\partial_{\mu}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}-g\boldsymbol{W}_{\mu}\times\boldsymbol{F}^{\mu\nu}=g\boldsymbol{j}^{\nu} \qquad (13.16\,\mathrm{a})$$

$$D_{\mu}\boldsymbol{F}_{\nu\lambda}+D_{\nu}\boldsymbol{F}_{\lambda\mu}+D_{\lambda}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}=0 \qquad (13.16\,\mathrm{b})$$



(a)　$F_{\mu\nu}$ を求めるための経路　　(b)　$D_{\lambda}F_{\mu\nu}$ を求めるための経路

図 13.1　共変微分を計算するための経路

となる．$\boldsymbol{j}^{\nu}$ はアイソスピンカレントである．この方程式は W に関して非線形である．非線形項を除き，$g \to q$，$D_\mu \to \partial_\mu$ とすれば，マクスウェルの式に帰着する．

これらの運動方程式を導く $SU(2)$ ゲージ不変なラグランジアンは，

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \tag{13.17}$$

で与えられる．ゲージ場の質量項は存在しないので，非可換ゲージ場粒子の質量もゼロでなければならない．このようにして導入したゲージ理論は一般にくりこみ可能であることは後に証明された．

13.3 QCD (quantum chromo-dynamics)

QCD とは電荷に基づく QED と同じ数学的枠組みに従う色荷の量子力学という意味である．QCD のラグランジアンは (13.17) の $SU(2)$ 対称性を $SU(3)$ と読み替えれば得られる．すなわち，クォークは 3 種のカラーチャージ R, G, B (赤，緑，青の 3 原色に対応) をもつとし，$\psi=(R, G, B)$ のように表す．$SU(3)$ 変換は，(13.7 a) で $SU(2)$ の 3 個の生成子 t_k を 8 個の生成子 t_k で置き換え，(13.7 b) の生成子の交換関係の構造定数 ε_{ijk} を，$SU(3)$ の構造定数 f_{ijk} (付録 F 参照) で置き換えて得られる．8 個の生成子に対応して 8 個のゲージ場 $A_{k\mu}$ があり，共変微分が定義される．

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{t} = \partial_\mu + ig\sum_{k=1}^{8} A_{k\mu}\frac{\lambda_k}{2} \tag{13.18}$$

λ_k は生成子の 3×3 表現行列である (付録 F 参照)．

QCD の提案者が誰かははっきりしない．1965 年にはすでに，ハン-南部がカラーを起因とする相互作用の提案をしていた[2)]．しかしこのモデルは，クォーク電荷を整数にするためにやや複雑な対称性構造をもっていた．歴史上の展開点は，グロス-ウィルチェック-ポリッツァー (D. Gross-F. Wilczek-H. D. Politzer) らによる漸近自由の発見であった[3)4)]．漸近自由とは，クォークとグルーオンの結合定数 $\alpha_s = g^2/4\pi$ が，反応の運動量遷移 Q^2 の減少関数であるということ，具体的には $(\ln Q^2)^{-1}$ のように振る舞うということであり，$Q^2 \to$

∞ で実効的な結合定数 $\alpha_s(Q^2) \to 0$ になる．すなわち，QCD の漸近自由がパートンモデルの理論的根拠を提供し，スケーリング極限が状況によってははやくも $Q \gtrsim 1$ Gev で成立することの説明も与えた，この結果，QCD が強い相互作用理論の有力候補として急浮上したのである．漸近自由はグルーオン場の従う方程式が非線形であることの帰結の一つである．またクォークの閉じ込めもこの非線形性に起因すると考えられている．漸近自由が成立していれば，クォークとグルーオンの相互作用を摂動論で扱うことができ，深非弾性散乱でのパートンモデルにグルーオン放出などの高次効果を取り入れて，Q^2 の関数としてどう発展するかを予言できる．こうして，電子，ミューオンやニュートリノによる深排弾性散乱の精密データと QCD の予言と比較して，QCD の正当性が確立した．

ハドロン同士の相互作用も，パートン同士の相互作用によって表すことができる ((12.146) 参照)．これも QCD による理論的裏付けを得ることができ，さらに高次効果をどのように計算するかの処方箋も与えられた．クォークやグルーオンは，現象的にはジェットとして観測されるので，ジェット現象を観測することにより，クォークやグルーオン同士の強い相互作用反応を任意の精度で定量的に扱う理論的枠組みができたのである．

一方，Q^2 の小さいところでは，漸近自由が成立せず非摂動的取扱いが必要となる．今日では，QCD を数値的に取り扱う格子ゲージ理論により，ハドロンの質量スペクトルや反応定数などの計算が可能となり，また QCD に立脚した現象論としてのカイラル摂動論が発達して種々の低エネルギー現象を扱えるようになった．

こうして，QCD は電弱相互作用におけるワインバーグ-サラムの理論と並んで，今日では標準理論として確立されている．種々の電弱相互作用反応の QCD 補正やジェット現象を再現できる理論として，理論の精密化が進められている．さらに QCD 理論の展開に伴い，固有の新現象例えばインスタントン効果などが理論的に予言されて，それらの観側現象への影響の研究も盛んになるなど，今日の素粒子論/高エネルギー物理学の重要な一翼を担っている．

13.4 電弱統一理論

13.4.1 電磁力と弱い力の融合

弱い相互作用は左巻き粒子にのみ作用すること，$W^{\pm}$ はアイソスピンカレントに結合すること，したがって W^0 を追加すれば $SU(2)$ ゲージ理論の体裁をもてることを第 10 章で学んだ．電磁相互作用はアイソスピンカレントを部分的に含むから．残りの部分を $U(1)$ 対称性に従う保存カレントと見なし，この力の源泉としての保存量をハイパーチャージと名付けることにする．電磁力と弱い力の双方を考えるときは，左巻きと右巻きを区別する必要があるので，それぞれ独立な違う粒子と考えて，粒子ごとに違うハイパーチャージ Y とアイソスピン I をもち，電荷はその組み合わせと考える．強い相互作用における西島-ゲルマンの法則に対応して，弱い相互作用についても

$$Q = I_3 + Y/2 \tag{13.19}$$

が成立するものとする．Q は陽子電荷 e を単位とした電荷量である．さしあたり電子とニュートリノを考えるが，以下の議論は任意の 2 重項に適用可能である．左巻き成分は対になって $W^{\pm}$ と弱い相互作用をするのでアイソスピン 1/2 の 2 重項

$$\Psi_L = \begin{bmatrix} \nu_L \\ e_L \end{bmatrix} \tag{13.20}$$

を構成する．ν_R は存在しないとすれば，e_R はアイソスピン 0 の 1 重項である．(13.19) を満たすようにハイパーチャージを決めれば，$Y(\nu_L) = Y(e_L) = -1$, $Y(e_R) = -2$ となる．ハイパーチャージに結合するゲージ場を B_μ とすると，$U(1)$ および $SU(2)$ 対称性を満たす（$SU(2) \times U(1)$ という）ラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \Psi_L + \bar{e}_R i\gamma^\mu D_\mu e_R - \frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{13.21 a}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_W \boldsymbol{W}_\mu \cdot \boldsymbol{t} + i(g_B/2)B_\mu Y \tag{13.21 b}$$

のように書ける．$g_B/2$ の因子 2 は後の便宜のため入れたものである．Ψ_L と e_R は独自のアイソスピンとハイパーチャージをもつので，アイソスピンとハイ

パーチャージの演算子 $\boldsymbol{t}$ と Y は演算する相手により異なる値をとる．例えば $\boldsymbol{t}$ は e_R に演算すれば 0 である．ラグランジアンに質量項がないことに注目しよう．質量項が存在すると左巻き成分と右巻き成分が混合するので（§3.8 参照），独自のハイパーチャージとアイソスピンをもたせられない．すなわち，左巻き成分と右巻き成分とでそれぞれ独立なゲージ不変性をもつ（カイラル不変性という）世界では，フェルミオンは質量をもてない．質量をもてないことには，とりあえず目をつぶって話を進めることにしよう．ゲージ場 B と W^0 は，同じカレントに結合するので混合が起きる．ニュートリノは電磁場に結合してはいけないので，ニュートリノに結合する場の組み合わせを Z，それと直交する組み合わせを電磁場と定義して A と書く．

$$Z_\mu=\frac{1}{\sqrt{g_W{}^2+g_B{}^2}}(g_W W^0{}_\mu-g_B B_\mu)\equiv\cos\theta_W W^0{}_\mu-\sin\theta_W B_\mu \tag{13.22 a}$$

$$A_\mu=\frac{1}{\sqrt{g_W{}^2+g_B{}^2}}(g_B W^0{}_\mu+g_W B_\mu)\equiv\sin\theta_W W^0{}_\mu+\cos\theta_W B_\mu \tag{13.22 b}$$

こうして定義した Z_μ と A_μ を代入し，$Q=I_3+Y/2$ を使って書き直し．A_μ とフェルミオン場の結合定数を e と読み替えると，ラグランジアンの相互作用部分は次のように変形される．

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\rm INT}=-[&e\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu Q\Psi+(g_W/\sqrt{2})\overline{\Psi}_L\gamma^\mu(W^+{}_\mu\tau_++W^-{}_\mu\tau_-)\Psi_L\\&+g_Z\overline{\Psi}\gamma^\mu Z_\mu(I_{3L}-Q\sin^2\theta_W)\Psi]\end{aligned} \tag{13.23 a}$$

$$g_W=\frac{e}{\sin\theta_W},\qquad g_Z=\frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W} \tag{13.23 b}$$

I_{3L} は L 成分のみに作用することを意味する．以上は，フェルミオンおよび W，Z の質量が 0 であれば成り立つ式である．これに質量項を付加すれば，実験データを説明するための現象論的ラグランジアンとしては，現代でもかなり満足できるものとなる．

このラグランジアンを使い，フェルミオンの W 交換散乱を 4-フェルミ相互作用に等しいとおけば（§10.7 参照），

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\frac{g_W{}^2}{8m_W{}^2}=\frac{e^2}{8m_W{}^2\sin^2\theta_W} \tag{13.24}$$

を得る．$\sin^2\theta_W(\simeq 0.234)$ はワインバーグ角と呼ばれ，実験で決められれば，W の質量も計算できる．

この理論の不満足な点は質量を手で入れたため，ゲージ不変性を壊し繰り込み不可能で理論としての信頼性がないことである．もちろん高次効果の計算もできない．

13.4.2 自発的対称性の破れ

前節では，質量項を手で入れてやれば，現象論的には満足すべきラグランジアンがつくれることを議論した．しかし，理論的にはゲージ不変性を破ってしまうので不満足である．そこで新しくスカラー場（ヒッグス）を導入し，そのスカラー場との相互作用の結果として質量項が生じると考える．質量項のみを取り出せばゲージ不変性は破れるが，新しいスカラー場が関与する部分（ヒッグスセクターと呼ぶ）をゲージ不変に保ってやれば，全体としてはゲージ不変に保たれるであろうと考えられる．

対称性のよい方程式の解は同じ対称性をもつが，これが安定とは限らない．実現した解の基底状態が，もとの方程式の対称性を示さないとき，対称性が自発的に破れたという．例えば，真っ直ぐな針金を平らな平面に垂直に立て，真上から力を加えるとき，解は回転対称性をもつはずであるが，真っ直ぐたわむ解は不安定で，実現する状態はどちらかの方向にたわむ．すなわち，基底状態では回転対称性が破れている．しかし，どの方向にたわんでもエネルギーは同じで，縮退している基底状態が無数にあるというところに対称性の名残りがある．

この考察を進めて，次のような自己相互作用をもつ複素スカラー場（ヒッグス場）を考える．

$$\mathscr{L}_{\mathrm{G}}=\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-V(\phi) \tag{13.25 a}$$

$$V(\phi)=\lambda\left(\phi^\dagger\phi+\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2, \qquad \lambda>0 \tag{13.25 b}$$

このラグランジアンは，$\phi\to\exp(-i\alpha)\phi$，$\phi^\dagger\to\phi^\dagger\exp(i\alpha)$ というゲージ変換で不変であり，$|\phi|^2=\phi^\dagger\phi=$一定である．$\mu^2\propto T-T_{\mathrm{C}}$ のような温度依存性をもつとすれば高温では $\mu^2>0$ なので，ポテンシャルは $\phi=0$ で最小のエネルギーをもつ（図 13.2 a）．このとき μ は自己相互作用をもつヒッグス粒子の質量という意味づけができる．一方，臨界温度 T_{C} 以下の低温では $\mu^2<0$ となり，ポ

テンシャルはW字形に変わる(図13.2 b). このときは, μ^2 は質量という意味づけを失い, $V(\phi)$ 全体を場のポテンシャルと見なさなければならない. $\phi=0$ は不安定な解となり, $|\phi|^2=v^2/2=-\mu^2/2\lambda$ のとき安定なエネルギー最小の状態, すなわち真空状態となる. この真空は, $|\phi|^2=v^2/2$ を満たす ϕ の値ならばどこでも良い. そこで

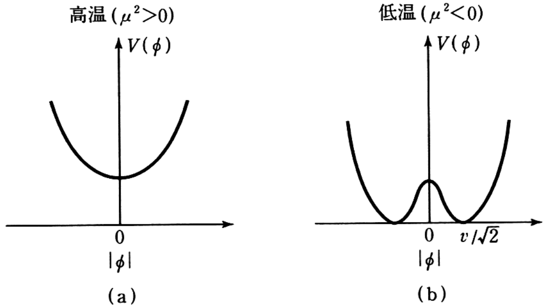


図 13.2 対称性の自発的破れ
(a) 高温($\mu^2>0$)では, $|\phi|=0$ のところがエネルギー最低の真空となる.
(b) 低温($\mu^2<0$)では, $|\phi|=0$ の点は不安定で $|\phi|=v/\sqrt{2}$ が真空となる.

$$\phi=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2} \tag{13.26 a}$$

と置き,

$$\phi_1=v, \quad \phi_2=0, \quad v=\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{13.26 b}$$

を真空点に選び, $\phi_1=v+\phi_1'$ と置くと, 真空状態では,

$$\langle\phi_1\rangle=v, \qquad \langle\phi_1'\rangle=\langle\phi_2\rangle=0 \tag{13.27}$$

すなわち, 対称性が自発的に破れた場合のヒッグス場は0でない真空期待値をもつ. ϕ_1', ϕ_2 を入れて書き直した上で, 改めて $\phi_1'\to\phi_1, |\phi'_1{}^2+\phi_2{}^2|/2\to|\phi|^2$ と置き換えると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G= &(1/2)[\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1-(-2\mu^2)\phi_1{}^2]+(1/2)[\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2]\\ &-[\lambda v\phi_1|\phi|^2+(\lambda/4)|\phi|^4]\end{aligned} \tag{13.28}$$

となる. 第1項は質量 $\sqrt{-2\mu^2}$ をもつ場 ϕ_1, 第2項は質量0をもつ場 ϕ_2, 第3項以降は両者の相互作用を表す. 真空は無限に縮退していて, 元の ϕ_1, ϕ_2 空間での位相は自由に選べるが, 場の自由度は無限大であるので, 異なる真空状態との間の遷移要素は0であり, いったん選んだ真空は固定される. すべての現

象はこの真空からの励起状態であるから，この世界では位相回転の自由度はなくゲージ対称性が破れている．この質量0をもつ ϕ_2 は南部-ゴールドストーン粒子と呼ばれ，無限大に縮退した真空の一つを選ぶとき，常に現れる粒子である．

13.4.3 ヒッグス機構

a. ゲージボソンの質量

ヒッグス場にゲージ場を導入した場合，すなわち，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{H}}=-(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)-V(\phi) \qquad (13.29\,\mathrm{a})$$

$$D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu \qquad (13.29\,\mathrm{b})$$

自発的対称性の破れがどうなるかを見てみよう．このとき場 ϕ を (13.26 a) の形に分解するのではなく．

$$\phi=\exp[i(\phi_2/v)]\frac{\phi_1}{\sqrt{2}}=\exp[i(\phi_2/v)]\frac{v+\phi_1'}{\sqrt{2}} \qquad (13.30)$$

という形に分解する．自由度の数は変わっていないので，場としては同等である*2)．ここで，次のゲージ変換を施し，

$$\phi \longrightarrow \phi'=\exp(-i(\phi_2/v))\phi=\frac{v+\phi_1'}{\sqrt{2}} \qquad (13.31\,\mathrm{a})$$

$$A_\mu \longrightarrow B_\mu=A_\mu+\frac{1}{ev}\partial_\mu\phi_2 \qquad (13.31\,\mathrm{b})$$

改めて ϕ_1' を ϕ_1 と置くと，ラグランジアンは次のように変わる．

$$\mathscr{L}_{\mathrm{H}}=-\frac{1}{4}F_{\mathrm{B}\mu\nu}F_{\mathrm{B}}{}^{\mu\nu}+\frac{(ev)^2}{2}B_\mu B^\mu+\frac{1}{2}[D_\mu\phi_1 D^\mu\phi_1-(-2\mu^2)\phi_1{}^2] \qquad (13.32\,\mathrm{a})$$

$$F_{\mathrm{B}\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu=F_{\mu\nu} \qquad (13.32\,\mathrm{b})$$

$$D_\mu=\partial_\mu+ieB_\mu \qquad (13.32\,\mathrm{c})$$

この式には南部-ゴールドストーン粒子は存在しない．ϕ_2 はゲージ場の第3成分に繰り込まれてしまった．そして第2項はB場の質量項であるからこのゲージ場は質量 $m_{\mathrm{B}}=ev$ をもつ！　このように，対称性の自発的破れに伴っ

---

*2) ϕ_2/v で展開すれば，$O(\phi_2/v, \phi_1'/v)$ 以上を無視する限り一致する．すなわち，場の励起エネルギーが真空エネルギーに比較して小さいときは，両者の差は高次効果にのみ現れる．

て，ヒッグス場の成分がゲージ場の縦波成分に化け，ゲージ場が質量を獲得するメカニズムをヒッグスメカニズムと呼ぶ．質量は真空の変化（相転移）に伴って獲得するのであるが，無限に縮退している真空の一つを選ぶためにゲージ変換の自由度を使った．真空はここで固定されるから，もはやゲージ変換の自由度はなくゲージが固定されたことになる．

(13.29) を非相対論的なハミルトニアンに直した式は，ギンツブルグ-ランダウの式として物性理論ではよく知られている式である．ϕ は超伝導を引き起こすクーパー対の波動関数であり，ある臨界温度以下でクーパー対が大量に発生して（クーパー対の凝縮という）相転移が起こり，物質は超伝導相に移行する．超伝導相では，磁力線が物体内に侵入するとクーパー対の渦電流が発生して完全に打ち消してしまい，磁力線が表面のわずかな厚さの層以上には侵入できない（マイスナー効果）．すなわち，フォトンが質量を獲得し，長距離力のクーロン力が超伝導体内では短距離力に変えられる．超伝導相ではゲージ不変性は破れている．したがって，ヒッグス機構を採用することは，われわれを取り巻く真空が超伝導相にあると見なすに等しい．この相転移の温度の目安は真空期待値 v で与えられる．

b. フェルミオン質量

フェルミオンの質量項は，ヒッグスとフェルミオンの相互作用を取り入れることにより生成できる．ヒッグスとフェルミオン場のローレンツ不変な相互作用として湯川相互作用を採用すれば

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{YUKAWA}} &= -f\overline{\psi}\psi\phi + \mathrm{h.c.} \quad (\text{h.c. はエルミート共役}) \\ &= -f\,(\overline{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}} + \overline{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}})\phi + \mathrm{h.c.}\end{aligned} \tag{13.33 a}$$

として，対称性を自発的に破れば，$\phi \to (v+\phi_1)/\sqrt{2}$ となるので，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YUKAWA}} = -m_f\overline{\psi}\psi - (m_f/v)\,\overline{\psi}\psi\phi_1 \tag{13.33 b}$$

$$m_f = \frac{fv}{\sqrt{2}} \tag{13.33 c}$$

がでる．これで望む質量項をつくったが，副産物としてフェルミオンとヒッグスとの相互作用が付加された．この湯川相互作用の結合定数 f を決める原理は存在せず，値は任意である．すなわちヒッグス機構では，各フェルミオンの質量は任意に手に入れるパラメターである．また，ヒッグスの自己相互作用の

強さλもまた任意のパラメターであり，ヒッグスの質量$m_H{}^2=-2\mu^2=2\lambda v^2$は，実験的に決めなければならない量である．

結局これまでにわかったことは，ゲージ場とフェルミオン場のラグランジアン（ゲージセクターと呼ぼう）に，ゲージ不変性を保ちつつ，外から質量項を付け足してやることは可能である．質量項のみを見る限りではゲージ不変性を破るが，質量提供元のヒッグスセクター自身はゲージ不変性を満たしている．ゲージ不変性は実は破れたのではなく，ゲージが固定されることによって隠されたのである．ヒッグスセクターをも含めた全体のラグランジアンはゲージ不変性をもっている．逆にいうと，質量をもつゲージ場の相互作用では，ヒッグスセクターをも含めてはじめてゲージ不変性が成立するのであり，高次効果の計算にはヒッグス場を含めなければならないということになる．また，ヒッグス粒子そのものも存在しなければならない．

13.4.4 GWS 理 論[5)]

a. ヒッグス 2 重項

(ν, e)の系で，$SU(2)\times U(1)$対称性をもつゲージ場に質量をもたせるためには，少なくも 4 個のヒッグス場すなわちアイソスピン 2 重項の複素ヒッグス場が必要である．3 個は$\mathrm{W}^{\pm}$と Z に質量を与えて自由度を失い，残る一つが有限質量のヒッグス粒子となる．

$$\Phi=\begin{bmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{bmatrix}, \qquad \Phi^C=-i\tau_2\Phi^\dagger=\begin{bmatrix}-\phi^{0\dagger}\\ \phi^-\end{bmatrix} \tag{13.34}$$

とすると，$\Phi(\Phi^C)$のハイパーチャージは$1\,(-1)$である．対称性の自発的破れで，

$$\Phi \longrightarrow \begin{bmatrix}0\\ (v+\varphi)/\sqrt{2}\end{bmatrix}, \qquad \Phi^C \longrightarrow \begin{bmatrix}-(v+\varphi)/\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix} \tag{13.35}$$

となるものとする．$SU(2)\times U(1)$不変かつローレンツ不変でフェルミオン質量項を与えるラグランジアンは，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{MASS}}=-f_{\mathrm{e}}[\,\bar{e}_{\mathrm{R}}(\Phi^\dagger\Psi_{\mathrm{L}})+(\overline{\Psi}_{\mathrm{L}}\Phi)e_{\mathrm{R}}] \tag{13.36}$$

となる．ニュートリノは質量 0 であるので，ここでは考慮しないが，アイソス

ピン $I_3=1/2$ のメンバーに質量を与えたいときは，$\boldsymbol{\Phi}^C$ を使う．

b. $\boldsymbol{SU(2)\times U(1)}$

結局，電子とニュートリノについて，$SU(2)\times U(1)$ 対称性を満たす全ラグランジアンを書き下ろすと，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{GWS}}=&-\frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu}-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}+\overline{\Psi}_{\mathrm{L}}i\gamma^{\mu}D_{\mu}\Psi_{\mathrm{L}}+\bar{e}_{\mathrm{R}}i\gamma^{\mu}D_{\mu}e_{\mathrm{R}}\\&+(D_{\mu}\Phi)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi)-V(\Phi)-f_e[\bar{e}_{\mathrm{R}}(\Phi^{\dagger}\Psi_{\mathrm{L}})+\overline{\Psi}_{\mathrm{L}}\Phi)e_{\mathrm{R}}]\end{aligned} \tag{13.37 a}$$

$$D_{\mu}=\partial_{\mu}+ig_{\mathrm{W}}\boldsymbol{W}_{\mu}\cdot\boldsymbol{t}+i(g_{\mathrm{B}}/2)B_{\mu}\cdot Y \tag{13.37 b}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\boldsymbol{W}_{\nu}-\partial_{\nu}\boldsymbol{W}_{\mu}-g_{\mathrm{W}}\boldsymbol{W}_{\mu}\times\boldsymbol{W}_{\nu} \tag{13.37 c}$$

$$B_{\mu\nu}=\partial_{\mu}B_{\nu}-\partial_{\nu}B_{\mu} \tag{13.37 d}$$

$$V(\Phi)=\lambda\left(|\Phi|^2+\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2 \tag{13.37 e}$$

となる．ラグランジアンの第1行目がゲージセクター，第2行目がヒッグスセクターである．これに W^0 と B の混合を取り入れ Z と A で書き直した上で，対称性の自発的破れを入れれば，グラショー-ワインバーグ-サラム (Glashow-Weinberg-Salam) 理論のラグランジアンが得られる．それは，すでに (13.21) で与えられているラグランジアンに質量項を入れ，ヒッグス場を付加したものになる．この理論が繰り込み可能であることは，1971 年ト・フーフト (G. t'Hooft) によって証明された[6)]．

c. W と Z の質量

$W^{\pm}$ と Z の質量項は，ヒッグスの運動エネルギー項で，

$$\Phi\longrightarrow\begin{bmatrix}0\\v/\sqrt{2}\end{bmatrix} \tag{13.38}$$

の置き換えをし，(13.37 a) の第 5 項に入れてやれば取り出せて，

$$m_{\mathrm{W}}=\frac{g_{\mathrm{W}}v}{2},\qquad m_{\mathrm{Z}}=\frac{g_{\mathrm{Z}}v}{2} \tag{13.39}$$

を得る．m_{W} はフェルミ結合定数と (13.24) 式によって結びついているので，ワインバーグ角がわかれば，$m_{\mathrm{W}}, m_{\mathrm{Z}}$ と真空期待値 v が計算できて

$$m_{\mathrm{W}}{}^2=\frac{\sqrt{2}e^2}{8G_{\mathrm{F}}\sin^2\theta_{\mathrm{W}}}=\left(\frac{37.5\ \mathrm{GeV}}{\sin\theta_{\mathrm{W}}}\right)^2=(80.3\ \mathrm{GeV})^2 \tag{13.40 a}$$

$$m_{\mathrm{Z}}=m_{\mathrm{W}}/\cos\theta_{\mathrm{W}}=91.19\ \mathrm{GeV} \tag{13.40 b}$$

$$v = 2m_W/g_W = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 250\ \mathrm{GeV} \tag{13.40 c}$$

を得る．

13.5 統一理論の発展

GWS 理論は，電磁相互作用と弱い相互作用の統一理論であり（合わせて電弱相互作用という），原理的には任意の精度であらゆる反応を理論的に計算できる理論である．この本では実験データの積み上げから，統一理論のもつべき性質を検討し統一理論に到達するまでの発展を記述した．この GWS 理論は既知の現象を説明する要素はすでに含んでおり，モデルの正否はその予言する未知の現象の実験的検証にある．GWS 理論が提案された時点（1967 年）で，弱相互作用の中性カレント現象は検出されていなかったが，その後 1973 年にはニュートリノ反応で中性カレント現象が発見された．1970 年代には種々の中性カレント現象が総合的にテストされ，理論の正しい証拠が集積されると同時に，ワインバーグ角の値が $\sin^2\theta_W \simeq 1/4$ に収束してきた．1970 年代終わりには，GWS 理論はほぼ学界に定着していたといってよい．1983 年にはルビア (C. Rubbia) らが，CERN の 540 GeV 陽子反陽子衝突型加速器 ($\mathrm{S\bar{p}ps}$) で，W と Z 粒子を予想通りの質量値のところで発見し[7]，GWS 理論は電弱相互作用を記述する真の理論として疑いの余地なく確立したのであった．GWS 理論は，同じ頃確立したクォークの力学 QCD を合わせて，素粒子の標準理論と呼ばれるようになった．

GWS 理論はヒッグス機構を採用し，相転移という物性論ではよく知られた考え方を導入し，力の統一分離に新しい思考方策を与えた．この考え方を拡張すれば，電弱相互作用と QCD をまとめる大統一理論も可能かもしれない．自然界で実際に大統一が実現している兆候も存在する．漸近自由の発見によって，力の結合定数はエネルギーとともに変化することがわかったので，電弱理論の $SU(2)$，$U(1)$ の結合定数および QCD の結合定数を，高エネルギーに外挿して行ったところ，$E \sim 10^{16}$ GeV 付近でほぼ同じ程度の値になることが発見された．すなわち，その辺りのエネルギーでは，大統一が成立している可能

性が強い．さらに，フェルミオンとボソンを入れ換える超対称性をゲージ化すれば重力理論が得られるので（超重力理論），さらなる統一に向けて盛んな研究活動が行われている．

参考文献

1) C. N. Yang and R. L. Mills : *Phys. Rev.*, **96** (1954) 191
2) M. Han and Y. Nambu : *Phys. Rev.*, **139B** (1965) 1006
3) D. Gross and F. Wilczek : *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973) 1343
4) H. D. Politzer : *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973) 1346
5) S. L. Glashow : *Nucl. Phys.*, **22** (1961) 579
S. Weinberg : *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967) 1264
A. Salam : Elementary particle Theory. Proc. 8th Nobel Symp., N. Svartholm, ed., Wiley-Interscience (1968)
6) G. t'Hooft : *Nucl. Phys.*, **B33** (1971) 173, **B35** (1971) 167
7) UA1 ; G. Arnison *et al.* : *Phys. Lett.*, **B122** (1983) 103, **B129** (1983) 273
UA2 ; M. Banner *et al.* : *Phys. Lett.*, **B126** (1983) 398, **B129** (1983) 130.

付　　録

A　ディラック行列

a.　ディラック平面波解

$$(\not{p}-m)u(p)=0, \qquad (\not{p}+m)v(p)=0$$
$$\bar{u}(p)(\not{p}-m)=0, \qquad \bar{v}(p)(\not{p}+m)=0$$
$$\not{p}\equiv p_\mu\gamma^\mu \tag{A. 1}$$
$$u_r{}^\dagger(p)u_s(p)=2E\delta_{rs}$$
$$v_r{}^\dagger(p)v_s(p)=2E\delta_{rs}$$
$$\bar{u}_r(p)u_s(p)=-\bar{v}_r(p)v_s(p)=2m\delta_{rs}$$
$$\bar{u}_r(p)v_s(p)=\bar{v}_r(p)u_s(p)=0 \tag{A. 2}$$
$$\sum_{r=\pm1/2}u_r(p)\,\bar{u}_r(p)=\not{p}+m,$$
$$\sum_{r=\pm1/2}v_r(p)\,\bar{v}_r(p)=\not{p}-m \tag{A. 3}$$

b.　行　　列

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$$
$$\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=-(i/4!)\sum\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$
$$(\gamma^5)^2=1, \qquad \gamma^5\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^5=0$$
$$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$
$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$
$$\gamma^5\gamma_\sigma=-(i/3!)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$$
$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho=g^{\mu\nu}\gamma^\rho-g^{\mu\rho}\gamma^\nu+g^{\nu\rho}\gamma^\mu+i\gamma^5\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma \tag{A. 4}$$

荷電共役変換

$$C\gamma^\mu C^{-1}=-\gamma^{\mu T}$$
$$C\gamma^5 C^{-1}=\gamma^{5T}$$
$$C\gamma^5\gamma^\mu C^{-1}=(\gamma^5\gamma^\mu)^T$$
$$C^T=C^\dagger=-C, \quad CC^\dagger=C^\dagger C=1, \quad C^2=-1 \tag{A. 5}$$

パウリ・ディラック表示

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\gamma^0,\quad \gamma=\beta\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{bmatrix}$$

$$\gamma^5=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad C=i\gamma^2\gamma^0=\begin{bmatrix}0 & -i\sigma_2\\ -i\sigma_2 & 0\end{bmatrix} \tag{A. 6}$$

ワイル（カイラル）表示

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{bmatrix},\quad \beta=\gamma^0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \gamma=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{bmatrix}$$

$$\gamma^5=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}i\sigma_2 & 0\\ 0 & -i\sigma_2\end{bmatrix} \tag{A. 7}$$

パウリ-ディラック表示での ϕ を ϕ_D とすると，ϕ_D と ϕ_W は

$$\phi_D=S\phi_W,\quad \gamma_D=S\gamma_W S^{-1},\quad S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{A. 8}$$

で結ばれている.

c.　トレース計算

$$\begin{aligned}
&\gamma_\mu\gamma^\mu=4\\
&\gamma_\mu \not{A}\gamma^\mu=-2\not{A}\\
&\gamma_\mu \not{A}\not{B}\gamma^\mu=4(AB)\\
&\gamma_\mu \not{A}\not{B}\not{C}\gamma^\mu=-2\not{C}\not{B}\not{A}
\end{aligned} \tag{A. 9}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[1]=4\\
&\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu]=4g^{\mu\nu},\\
&\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma]=4[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}]\\
&\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)=4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\\
&\mathrm{Tr}[\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{2n+1}]=0\\
&\mathrm{Tr}[\gamma^5]=\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu]=\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu]=\mathrm{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho]=0
\end{aligned} \tag{A. 10}$$

d.　レヴィチヴィタの反対称テンソル

$$\varepsilon^{ijk}=\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1\ ;\ ijk=1,2,3\ \text{の偶置換}\\ -1\ ;\ ijk=1,2,3\ \text{の奇置換}\\ \ \ 0\ ;\ \text{その他}\end{cases}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=-\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases}+1\ ;\ \mu\nu\rho\sigma=0123\ \text{の偶置換}\\ -1\ ;\ \mu\nu\rho\sigma=0123\ \text{の奇置換}\\ \ \ 0\ ;\ \text{それ以外}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=-det(g^{\lambda\lambda'})\quad \lambda=\mu\nu\rho\sigma,\ \lambda'=\alpha\beta\gamma\delta\\
&\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}\varepsilon_\alpha{}^{\beta\gamma\delta}=-det(g^{\lambda\lambda'})\quad \lambda=\nu\rho\sigma,\ \lambda'=\beta\gamma\delta\\
&\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}=-2(g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}-g^{\rho\delta}g^{\sigma\gamma})\\
&\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}=-6g^{\sigma\delta}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=-24 \tag{A. 11}$$

e.　行列要素のスピン和

$$\begin{aligned}
&K^{\mu\nu}(p_i, p_f)\\
&=\sum \bar{u}_s(p_f)\gamma^\mu(a-b\gamma^5)u_r(p_i)(\bar{u}_s(p_f)\gamma^\nu(a-b\gamma^5)u_r(p_i))^*\\
&=\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(a-b\gamma^5)(\not{p}_i-m_i)\gamma^\nu(a^*-b^*\gamma^5)(\not{p}_f-m_f)]\\
&=4[(|a|^2+|b|^2)\{p_i^\mu p_f^\nu+p_i^\nu p_f^\mu-g^{\mu\nu}(p_ip_f)\}+(|a|^2-|b|^2)m_im_f\\
&\quad -2iRe(ab^*)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{i\rho}p_{f\sigma}]
\end{aligned} \tag{A. 12}$$

反粒子の場合は，$m\to -m$ とする．

よく使われる例：$e(p_1)+\mu(p_2)\to e(p_3)+\mu(p_4)$

(1)　VV 散乱；$a=1, b=0, m_i=m_f, m_1=m_3=m, m_2=m_4=M$

$$\begin{aligned}
K_V^{\mu\nu}(p_i, p_f)&=4[\{p_f^\mu p_i^\nu+p_f^\nu p_i^\mu-(p_f\cdot p_i)g^{\mu\nu}\}+m^2g^{\mu\nu}]\\
&=4[p_f^\mu p_i^\nu+p_f^\nu p_i^\mu+(q^2/2)g^{\mu\nu}]
\end{aligned} \tag{A. 13}$$

$$q=p_i-p_f$$

$$\begin{aligned}
&K_V^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_V^{\mu\nu}(p_2, p_4)\\
&=16[2(p_1p_2)(p_3p_4)+2(p_1p_4)(p_2p_3)+q^2\{(p_1p_3)+(p_2p_4)\}+q^4]\\
&=8[(s-m^2-M^2)^2+(u-m^2-M^2)^2+2t(m^2+M^2)]\\
&=16[(s-m^2-M^2)(m^2+M^2-u)+t(m^2+M^2)+t^2/2]\\
&\simeq 8[s^2+u^2]\qquad s\gg m, M \text{ のとき}
\end{aligned} \tag{A. 14}$$

(2)　LL，LR，RL，RR 散乱

L：$a=b=1/2$，　R：$a=-b=1/2$　のとき

$$K_L^{\mu\nu}(p_i, p_f)=2[\{p_i^\mu p_f^\nu+p_i^\nu p_f^\mu-g^{\mu\nu}(p_ip_f)\}-i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{i\rho}p_{f\sigma}] \tag{A. 15a}$$

$$K_R^{\mu\nu}(p_i, p_f)=2[\{p_i^\mu p_f^\nu+p_i^\nu p_f^\mu-g^{\mu\nu}(p_ip_f)\}+i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{i\rho}p_{f\sigma}] \tag{A. 15b}$$

$$\begin{aligned}
&K_L^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{L\mu\nu}(p_2, p_4)=K_R^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{R\mu\nu}(p_2, p_4)\\
&\quad =16(p_1p_2)(p_3p_4)=4(s-m_1^2-m_2^2)(s-m_3^2-m_4^2)\\
&\quad \simeq 4s^2\qquad (s\gg M_i^2)
\end{aligned} \tag{A. 16a}$$

$$\begin{aligned}
&K_L^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{R\mu\nu}(p_2, p_4)=K_R^{\mu\nu}(p_1, p_3)K_{L\mu\nu}(p_2, p_4)\\
&\quad =16(p_1p_4)(p_2p_3)=4(u-m_1^2-m_4^2)(u-m_2^3-m_3^2)\\
&\quad \simeq 4u^2\quad (s\gg m_i^2)
\end{aligned}$$

f.　フォトンの偏極和

粒子のもつ4元運動量を q^μ，偏極ベクトルを $\varepsilon^\mu(\lambda)$ とすると，

$$q_\mu\varepsilon^\mu(\lambda)=0 \tag{A. 17}$$

横波偏極ベクトルは次式で定義され，

$$\varepsilon^\mu(\pm)=(0\,;\mp 1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2}, 0) \tag{A. 18a}$$

偏極和は次式で与えられる．

$$\sum_{\lambda=\pm}\varepsilon^{\mu}(\lambda)\varepsilon^{\nu}(\lambda)^{*}=\begin{cases}\delta_{ij}-\dfrac{q_i q_j}{|\boldsymbol{q}|^2} & \mu,\nu=i,j\\ 0 & \mu,\nu=0\end{cases}\tag{A. 19}$$

仮想フォトンで $q^2>0$ のときは，質量 $M=\sqrt{q^2}$ をもつベクトル粒子と同じように縦波偏極ベクトルが定義できる．

$$\varepsilon^{\mu}(0)=(0\,;\,0,0,1)\tag{A. 18b}$$

また，共変的場の理論取扱いのため

$$\varepsilon^{\mu}(s)=q^{\mu}/\sqrt{q^2}=(1\,;\,0,0,0)\quad(|\boldsymbol{q}|=0\text{ の系})\tag{A. 18c}$$

を定義すると，$q^{\mu}=(\omega\,;\,0,0,|\boldsymbol{q}|)$ の系では，

$$\varepsilon^{\mu}(0)=(|\boldsymbol{q}|/M\,;\,0,0,\omega/M)\tag{A. 20a}$$

$$\varepsilon^{\mu}(s)=(\omega/M\,;\,0,0,|\boldsymbol{q}|/M)\tag{A. 20b}$$

これらの偏極ベクトルは規格直交条件

$$\varepsilon(\lambda)\cdot\varepsilon(\lambda')^{*}=\varepsilon_{\mu}(\lambda)\varepsilon^{\mu}(\lambda')^{*}=g^{\lambda\lambda'}\tag{A. 21}$$

と完全性の条件を満たす．

$$\sum_{\lambda=\mathrm{all}}g^{\lambda\lambda}\varepsilon^{\mu}(\lambda)\varepsilon^{\nu}(\lambda)^{*}=g^{\mu\nu}\tag{A. 22a}$$

$$\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^{\mu}(\lambda)\varepsilon^{\nu}(\lambda)^{*}=-\left(g^{\mu\nu}-\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2}\right)\tag{A. 22b}$$

B　クーロンゲージでの電磁気学

$$A^{\mu}=(A^0;A),\ F^{\mu\nu}=\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu},\ j^{\mu}=(\rho;j)\tag{B. 1}$$

$$\mathcal{L}_{EM}=-(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-j_{\mu}A^{\mu}=-(1/2)(\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{E}^2)-j_{\mu}A^{\mu}$$

として，マクスウェルの方程式は

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu})=j^{\nu}\tag{B. 2}$$

通常はローレンツ条件

$$\partial_{\mu}A^{\mu}=0$$

を課すが，クーロンゲージでは

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0\tag{B. 3}$$

とする．この結果 (B. 2) の $\nu=0$ 成分は

$$\Delta A^0(x)=-\rho\tag{B. 4}$$

となり，$x\to\infty$ で $A^0=0$ という境界条件下では

$$A^0(x)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)d^3\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\tag{B. 5}$$

が解となる．このポテンシャルは遅延ポテンシャルではなく，$\boldsymbol{r}$ でのポテンシャルが，同時刻での $\boldsymbol{r}'$ 点での電荷分布により決まる瞬間的ポテンシャルである．ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H}=\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial[\partial_0(A_\nu)]}\cdot\partial_0 A_\nu-\mathcal{L}_{EM}=(1/2)(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)-\rho A^0+j_\mu A^\mu$$
$$=(1/2)(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A} \tag{B. 6}$$

(B. 6) にはクーロンポテンシャル項がないように見えるが，実は E^2 の中に隠れている．それを見るためには

$$\boldsymbol{E}_{/\!/}=-\nabla A^0, \qquad \boldsymbol{E}_\perp=-\partial_0\boldsymbol{A} \tag{B. 7}$$

とおけば，クーロンゲージでは

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_\perp+\boldsymbol{E}_{/\!/}, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E}_{/\!/}=0, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E}_\perp=0 \tag{B. 8}$$

となる．部分積分によって

$$|\boldsymbol{E}|^2=|\boldsymbol{E}_\perp+\boldsymbol{E}_{/\!/}|^2=|\boldsymbol{E}_\perp-\nabla A^0|^2=|\boldsymbol{E}_\perp|^2+|\boldsymbol{E}_{/\!/}|^2 \tag{B. 9}$$
$$|\boldsymbol{E}_{/\!/}|^2=\nabla A^0\cdot\nabla A^0=-(\Delta A^0)A^0=\rho A^0$$

がいえるから，

$$\mathcal{H}=(1/2)(|\boldsymbol{B}|^2+|\boldsymbol{E}_\perp|^2)+(1/2)\rho A^0-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}_\perp \tag{B. 10}$$

となりクーロン項が再び出現する．ただし 1/2 の因子に注意．(B. 10) から，次式のハミルトニアンが導ける．

$$H=\int d^3\boldsymbol{r}\left[\frac{1}{2}\left\{(\nabla\times\boldsymbol{A}_\perp)^2+(\partial_0\boldsymbol{A}_\perp)^2\right\}-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}_\perp\right]+\frac{1}{2}\iint d^3\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{r}'\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{B. 11}$$

こうして，スカラーポテンシャルに対応する自由度は瞬間的なクーロン力で置き換えられ，残りはすべて横偏極の電磁場のみで記述される．この形はローレンツ共変な形をしていないが，詳細な計算によれば常にローレンツ不変性が成立していることが証明できる．したがって，直感的物理的な考察を行う場合はクーロンゲージで行うと見通しがよくなる．しかし，計算は共変ゲージで行うのが便利である．

クーロンゲージを採用した場合，みかけ上共変性が壊れて最も困るのは，偏極について和をとるときである．

$$\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\mu(\lambda)\varepsilon_\nu(\lambda)^*=\begin{cases}\delta_{ij}-\dfrac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}, & \mu=i,\quad \nu=j\\[2mm] 0 & \mu,\nu=0\end{cases} \tag{B. 12}$$

は，特定の座標系では成立するが，ローレンツ共変な形をしていない．そこで (B. 12) を共変形にするため，次の二つのベクトルを導入する．

$$\eta^\mu=(1;0,0,0)\ \text{もしくは}\ (\varepsilon\cdot\eta)=0\ \text{を満たす任意のベクトル} \tag{B. 13}$$

$$\hat{k}^\mu=\frac{k^\mu-(k\eta)\eta^\mu}{\sqrt{(k\eta)^2-k^2}} \tag{B. 14}$$

そうすると

$$f^{\mu\nu}\equiv\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon^\nu(\lambda)^*=-g^{\mu\nu}+\eta^\mu\eta^\nu-\hat{k}^\mu\hat{k}^\nu$$
$$=-g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{(k\eta)^2-k^2}+\frac{(k^\mu\eta^\nu+\eta^\mu k^\nu)(k\eta)}{(k\eta)^2-k^2}-\frac{k^2\eta^\mu\eta^\nu}{(k\eta)^2-k^2} \tag{B. 15}$$

と表せる．これに従いフォトン伝播関数 D_F も

$$D_F(k^2)=\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}\to\frac{f^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} \tag{B.16}$$

となる．これは余分な項を導入したように見えるがフォトンの伝播関数は通常は保存カレントに挟まれて出現する．$k_\mu j^\mu=0$ であるから $k^\mu=(\omega;0,0,k)$ であるような座標系では，

$$(k\cdot\eta)-k^2=|\boldsymbol{k}|^2,\qquad j^3=(\omega/|\boldsymbol{k}|)j^0$$

を使うと，

$$\frac{j^\mu f_{\mu\nu}j^\nu}{k^2}=-\frac{j^\mu j_\mu}{k^2}+\frac{j^0j^0}{|\boldsymbol{k}|^2}=\frac{j^1j^1+j^2j^2}{k^2}=\frac{j_\perp j_\perp}{k^2} \tag{B.17}$$

となって，横方向成分のみに帰着する．

逆に考えるとフォトンの共変的伝播関数 $(-g^{\mu\nu}/k^2)$ に，$j^0j^0/|\boldsymbol{k}|^2$ が付け加わることになるが，ハミルトニアンのクーロン項の寄与とキャンセルするので，クーロンゲージにおいても共変的伝播関数 $(-g^{\mu\nu}/k^2)$ を使用してかまわないということになる．

C．断　面　積

S 行列と状態密度

体積 V の中に粒子が $2E$ 個あるように状態密度を規格化する．このとき $E\sim E+dE$ の中にある粒子の状態密度は

$$dN=\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{d^3p}{2E} \tag{C.1}$$

$$\langle p|q\rangle=2E(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{C.2}$$

S 行列と不変散乱行列 T，不変行列要素 $\mathcal{M}_{fi}$ を次式で定義する．

$$S=1-iT$$

散乱行列 S を次のように書くとき，

$$S_{fi}=\delta_{fi}-i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-\sum_f p_f)\mathcal{M}_{fi} \tag{C.3}$$

断面積と崩壊率は，

$$\mathrm{d}\sigma=|\mathcal{M}_{fi}|^2\frac{\mathrm{dLIPS}}{F} \tag{C.4}$$

$$F=2s\lambda(1,x_1,x_2)=4[(p_1p_2)^2-m_1{}^2m_2{}^2]^{1/2}=4E_1E_2v_{12}$$
$$s=(p_1+p_2)^2$$
$$\lambda(1,x,y)=(1-2x-2y+x^2+y^2-2xy)^{1/2},\ x_i=m_i{}^2/s \tag{C.5}$$

$$\mathrm{dLIPS}=(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-\sum p_f)\frac{1}{m!}\prod_f\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \tag{C.6}$$

で与えられる．F は入射フラックス，v_{12} は相対速度，$m!$ は同一粒子が存在する場

合の補正因子である．崩壊率は，親の粒子の指標を2とするとき，$p_1=0$, $F=2m_2$ と置いて得られる．

$$d\Gamma=|\mathcal{M}_{fi}|^2\frac{\mathrm{dLIPS}}{2m_2} \tag{C. 7}$$

a．終状態が2体系の重心系での断面積

重心系での全エネルギーを W と書くと

$$v_{12}=\left|\frac{p_1}{E_1}-\frac{p_2}{E_2}\right|=\frac{p_iW}{E_1E_2},\qquad W=E_1+E_2=\sqrt{s} \tag{C. 8}$$

$$\therefore\quad F=4E_1E_2v_{12}=4p_iW \tag{C. 9}$$

ただし，p_i は始状態の運動量を示す．

$$\mathrm{dLIPS}_{CM}=\frac{1}{16\pi^2}\delta(W-E_3-E_4)\delta^3(p_3+p_4)\frac{d^3p_3d^3p_4}{E_3E_4} \tag{C. 10}$$

$\int d^3p_4$ によって，運動量の積分は1を与えるが，同時にエネルギーの中の運動量をも変える．$\int d^3p_3$ を実行するためには，δ 関数の中の p_3 を含む関数を G として，重心系の終状態運動量 p_f で表すと

$$G=E_3+E_4=\sqrt{p_f{}^2+m_3{}^2}+\sqrt{p_f{}^2+m_4{}^2} \tag{C. 11}$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_f}=\frac{p_f}{E_3}+\frac{p_f}{E_4}=\frac{p_fW}{E_3E_4}$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{dLIPS}_{CM}}{F}=\frac{1}{4p_iW}\left(\frac{\partial G}{\partial p_f}\right)^{-1}\frac{p_f{}^2d\Omega_{CM}}{16\pi^2E_3E_4}=\frac{1}{64\pi^2s}\left(\frac{p_f}{p_i}\right)d\Omega_{CM}$$

$$\therefore\quad \frac{d\sigma}{d\Omega}\Big/_{CM}=\left(\frac{p_f}{p_i}\right)\frac{1}{64\pi^2s}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{C. 12}$$

b．2体弾性散乱の実験室系の断面積

簡単のため $m_1=m_3=0$, $m_2=m_4=M$ の場合に限る．

$$F=4E_1E_2v_{12}=4E_1M(p_1/E_1)=4p_1M \tag{C. 13}$$

位相体積は，

$$\mathrm{dLIPS}_{LAB}=(2\pi)^4\delta(E_1+M-E_3-E_4)\delta^3(p_1-p_3-p_4)\times\frac{d^3p_3d^3p_4}{(2\pi)^64E_3E_4} \tag{C. 14}$$

$\int d^3p_4$ は1を与えるが，同時にエネルギー E_4 の中の運動量をも変える．$\int d^3p_3$ を実行するためには，δ 関数の中の p_3 を含む関数を G として，

$$G\equiv E_3+E_4=p_3+\sqrt{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3)^2+M^2}$$
$$=p_3+\sqrt{p_1{}^2+p_3{}^2-2p_1p_3\cos\theta+M^2}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial G}{\partial p_3}=1+\frac{p_3-p_1\cos\theta}{E_4}=\frac{1}{E_4}(E_4+p_3-p_1\cos\theta)$$
$$=(E_1+M-p_1\cos\theta)/E_4=(M+p_1(1-\cos\theta))/E_4$$

ここで，$q=p_1-p_3=p_4-p_2$ を導入する．

$$p_4{}^2=(p_4-p_2+p_2)^2=(q+p_2)^2=q^2+2(p_2q)+p_2{}^2$$

$$\therefore \quad -q^2=2(p_2q)=2M(E_1-E_3)=2M(p_1-p_3)$$

$$=-(p_1-p_3)^2=2p_1p_3(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \quad p_1(1-\cos\theta)=\frac{M}{p_3}(p_1-p_3) \tag{C. 15}$$

これを $\dfrac{\partial G}{\partial p_3}$ の式に入れて,

$$\frac{\partial G}{\partial p_3}=\frac{p_1M}{p_3E_4} \tag{C. 16}$$

$$\frac{\mathrm{dLIPS}_{LAB}}{F}=\frac{1}{4p_1M}\left(\frac{\partial G}{\partial p_3}\right)^{-1}\frac{p_3{}^2d\Omega_{LAB}}{16\pi^2E_3E_4}=\frac{p_3{}^2d\Omega_{LAB}}{64\pi^2(Mp_1)^2} \tag{C.17}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{LAB}=\left(\frac{p_3}{p_1}\right)^2\frac{1}{64\pi^2M^2}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{C. 18}$$

c.　不変断面積

しばしば役にたつ表記法として，立体角の代わりに不変量 t を使うやり方がある．$m_1=m_3=m$, $m_2=m_4=M$ という条件を付して，重心系で評価すると，

$$t=q^2=2m^2-2(E_1E_3-p_1p_3\cos\theta)$$

$$p_1=p_3=\frac{\sqrt{s}}{2}\lambda\left(1,\frac{m^2}{s},\frac{M^2}{s}\right)\simeq\frac{s-M^2}{2\sqrt{s}}$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}t=2p_1p_3\mathrm{d}\cos\theta=\frac{p_1p_3}{\pi}\mathrm{d}\Omega\simeq\frac{(s-M^2)^2}{4\pi s}\mathrm{d}\Omega_{CM} \tag{C. 19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{p_1p_3}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{CM}}=\frac{|M_{fi}|^2}{16\pi\lambda(s,m^2,M^2)}\simeq\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi(s-M^2)^2} \tag{C. 20}$$

(C. 19), (C. 20) の最後の式は $m=0$ のとき成立する．

d.　スケーリング変数

$$y\equiv\frac{(p_2q)}{(p_1p_2)}\begin{cases}=\dfrac{E_1-E_3}{E_1}\equiv\dfrac{\nu}{E_1}\fallingdotseq\dfrac{2M\nu}{s} & (\text{実験室系})\\[2ex] \fallingdotseq\dfrac{1-\cos\theta}{2} & (\text{重心系})\end{cases} \tag{C. 21a}$$

ただし，$q=p_1-p_3$

$$x\equiv\frac{|q^2|}{2(p_2q)}=\frac{Q^2}{2M\nu}=\frac{E_1E_3(1-\cos\theta)}{M(E_1-E_3)}\fallingdotseq\frac{Q^2}{sy} \tag{C. 21b}$$

≒ はスケーリング極限 ($E_i\gg m_i$, $Q^2, 2M\nu\gg(1\mathrm{GeV})^2$) の近似式である．このとき

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}\fallingdotseq E_1\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E_3}\right|_{LAB}\fallingdotseq4\pi\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{CM}=\frac{1}{16\pi s}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{C. 22}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\fallingdotseq2\pi M\frac{y}{1-y}\left.\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E_3}\right|_{LAB} \tag{C. 23}$$

が成立する．

e.　役に立つ関係式

$$A+B+C\equiv(2\pi)^4\delta^4(P-p_3-p_4)\frac{\mathrm{d}^3p_3\mathrm{d}^3p_4}{(2\pi)^6 2E_3 2E_4}[a+b_\mu p_3{}^\mu+c_{\mu\nu}p_3{}^\mu p_4{}^\nu]$$
$$=\frac{\lambda(1,x,y)}{8\pi}\left[a+b_\mu P^\mu\frac{(1+x-y)}{2}\right.$$
$$\left.+c_{\mu\nu}\frac{1}{2}\left\{(1-x-y)P^\mu P^\nu-\frac{\lambda^2(1,x,y)}{6}(4P^\mu P^\nu-P^2g^{\mu\nu})\right\}\right] \qquad \text{(C. 24)}$$

ただし，

$$E_3=\sqrt{p_3{}^2+m_3{}^2}, \qquad E_4=\sqrt{p_4{}^2+m_4{}^2}$$
$$\lambda(1,x,y)=(1+x^2+y^2-2x-2y-2xy)^{1/2}$$
$$x=\frac{m_3{}^2}{P^2}, \qquad y=\frac{m_4{}^2}{P^2}$$

特に，$m_3=m_4=0$ の場合は

$$A=\frac{a}{8\pi}, \qquad B=\frac{b_\mu P^\mu}{16\pi}, \qquad C=\frac{c_{\mu\nu}}{96\pi}(2P^\mu P^\nu+P^2g^{\mu\nu}) \qquad \text{(C. 25)}$$

(C. 24) を証明するには，ローレンツ不変性より $A=X(P^2)$, $B=b_\mu P^\mu Y(P^2)$, $C=c_{\mu\nu}(P^\mu P^\nu Z(P^2)+g^{\mu\nu}W(P^2))$ と書けることに留意し，次に P の静止系で各関数を決めればよい．

D　回転と角運動量

D. 1　角運動量演算

単位ベクトル $\boldsymbol{n}(\theta,\phi)$ を中心として角度 α だけ回転する演算子 R は

$$R=\exp(-i\alpha(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})) \qquad \text{(D. 1)}$$

角運動量演算子 J_i ($i=1,2,3$ または x,y,z) は

$$[J_i, J_j]=i\varepsilon_{ijk}J_k \qquad \text{(D. 2)}$$

$J^2=J_1{}^2+J_2{}^2+J_3{}^2$ はすべての J_i と交換し固有値 $j(j+1)(j=0,1/2,1,3/2,\cdots)$ をもつので，角運動量の固有ベクトルは，j と J_z の固有値 m を指定すれば決まる．$J_\pm=J_x\pm iJ_y$ とすると

$$J^2|j,m\rangle=j(j+1)|j,m\rangle$$
$$J_z|j,m\rangle=m|j,m\rangle$$
$$J_+|j,m\rangle=\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|j,m+1\rangle$$
$$J_-|j,m\rangle=\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|j,m-1\rangle \qquad \text{(D. 3)}$$

軌道角運動量の場合：$J_i=L_i$

$$L_i=x_jp_k-x_kp_j=-i(x_j\partial_k-x_k\partial_j) \qquad \text{(D. 4)}$$

L^2 の固有値は $L(L+1)$, $L=0,1,2,3\cdots$ で固有関数は，$-L\leqq m\leqq L$ として

$$Y_{L,m}(\theta,\phi)=(-1)^{(m+|m|)/2}\left[\frac{(2L+1)}{4\pi}\frac{(L-|m|)!}{(L+|m|)!}\right]^{1/2}P_L{}^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi}$$

$$P_L^{|m|}(z)=(1-z^2)^{|m|/2}\frac{1}{2^L L!}\frac{d^{L+|m|}}{dz^{L+|m|}}(z^2-1)^L$$

$$Y_{L,-m}(\theta,\phi)=(-1)^m[Y_{L,m}(\theta,\phi)]^* \tag{D.5}$$

スピン角運動量の場合 $J_i=S_i$ と書く．$S=1/2$ の場合はパウリ行列

$$\sigma_x=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_y=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{D.6}$$

を用いて，$S_i=\sigma_i/2$ と表される．固有関数は

$$\chi_{+1/2}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \chi_{-1/2}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{D.7}$$

$S=1$ の場合は，固有値 $\pm1, 0$ の固有関数を $e_{\pm1}, e_0$ として

$$e_{+1}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad e_0=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad e_{-1}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{D.8}$$

とすれば，(D. 3) を使って直ちに

$$S_+=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad S_-=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix} \tag{D.9a}$$

と求められるから，

$$S_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad S_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{bmatrix},\quad S_z=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \tag{D.9b}$$

D. 2　角運動量の合成

角運動量 $\boldsymbol{J}_1$ と $\boldsymbol{J}_2$ を合成して，$\boldsymbol{J}$ をつくると

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2$$

であるので，$\boldsymbol{J}$ の固有値 J, M は，

$$|j_1-j_2|\leqq J\leqq j_1+j_2,\qquad M=m_1+m_2 \tag{D.10}$$

で与えられ，固有ベクトル $|J, M\rangle$ は，クレプシュ-ゴルダン係数を使って，

$$|J, M\rangle=\sum C^{JM}_{j_1m_1\cdot j_2m_2}|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle \tag{D.11}$$

表 D. 2　$C^{JM}_{j_1,M-m;1/2,m}$

$J\backslash m$	$m=1/2$	$m=-1/2$
$j_1+1/2$	$\left[\frac{j_1+M+1/2}{2j_1+1}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{j_1-M+1/2}{2j_1+1}\right]^{1/2}$
$j_1-1/2$	$-\left[\frac{j_1-M+1/2}{2j_1+1}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{j_1+M+1/2}{2j_1+1}\right]^{1/2}$

表 D. 3　$C^{JM}_{j_1,M-m;1,m}$

$J\backslash m$	$m=1$	$m=0$	$m=-1$
j_1+1	$\left[\frac{(j_1+M)(j_1+M+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{(j_1-M+1)(j_1+M+1)}{(2j_1+1)(j_1+1)}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{(j_1-M)(j_1-M+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}\right]^{1/2}$
j_1	$-\left[\frac{(j_1+M)(j_1-M+1)}{2j_1(j_1+1)}\right]^{1/2}$	$\frac{M}{[j_1(j_1+1)]^{1/2}}$	$\left[\frac{(j_1-M)(j_1+M+1)}{2j_1(j_1+1)}\right]^{1/2}$
j_1-1	$\left[\frac{(j_1-M)(j_1-M+1)}{2j_1(2j_1+1)}\right]^{1/2}$	$-\left[\frac{(j_1-M)(j_1+M)}{j_1(2j_1+1)}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{(j_1+M+1)(j_1+M)}{2j_1(2j_1+1)}\right]^{1/2}$

で与えられる．クレプシュ-ゴルダン係数は一般形が与えられている[1)]．j_2 が 1/2, 1 の場合を表 D. 2, D. 3 に示す．

D. 3.　回 転 行 列

a.　$j=1/2, 1$ のとき

$|j, m\rangle$ を z 軸周りに回転しても位相がかかるだけであるが，y 軸の周りに回転したものは，m の違う状態が混じる．$|j, m\rangle$ は角運動量の大きさが変わらなければ完全系をつくるので，その線形結合で展開できる．

$$\therefore\quad e^{-i\theta J_y}|j, m\rangle=\sum_n d^j_{n,m}(\theta)|j, n\rangle \tag{D. 12}$$

この $d^j_{n,m}(\theta)$ を回転行列という．明らかに

$$d^j_{n,m}(\theta)=\langle j, n|e^{-i\theta J_y}|j, m\rangle \tag{D. 13}$$

d 関数の満たす性質は，

$$\begin{aligned}
&d^j_{n,m}(\theta)=d^j_{-m,-n}(\theta)=(-1)^{n-m}d^j_{m,n}(\theta)\\
&d^j_{n,m}(\theta)=(-1)^{j+n}d^j_{n,-m}(\pi-\theta)\\
&d^j_{n,m}(\pi)=(-1)^{j+n}\delta_{n,-m}\\
&d^j_{n,m}(-\pi)=(-1)^{n-j}\delta_{n,-m}
\end{aligned} \tag{D. 14}$$

$d^j_{n,m}(\theta)$ の規格条件は

$$\int d\cos\theta\, d^{j_1}_{n,m}(\theta)\,d^{j_2}_{n,m}(\theta)=\frac{2}{2j_1+1}\delta_{j_1,j_2} \tag{D. 15}$$

回転行列は一般式が Wigner によって与えられているが[1)]，$j=1/2, 1$ の場合は (D. 13) に直接 (D. 6) や (D. 9b) を代入して求めることができる．

$$\begin{bmatrix} d^{1/2}_{1/2,1/2} & d^{1/2}_{1/2,-1/2} \\ d^{1/2}_{-1/2,1/2} & d^{1/2}_{-1/2,-1/2}\end{bmatrix}=e^{-i(\theta/2)\sigma_y}=\sum_n\frac{1}{n!}\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_y\right)^n=\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}(i\sigma_y)$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}, & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}, & \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix} \tag{D. 16}$$

同様にして，$J=1$ の場合も

$$\begin{bmatrix} d^1_{1,1} & d^1_{1,0} & d^1_{1,-1} \\ d^1_{0,1} & d^1_{0,0} & d^1_{0,-1} \\ d^1_{-1,1} & d^1_{-1,0} & d^1_{-1,-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2}, & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, & \frac{1-\cos\theta}{2} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, & \cos\theta, & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\theta}{2}, & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{D. 17}$$

もう少し一般的な例をいくつかあげておくと[2]，

b．$j=L=$整数のとき

$$d^L_{m0}(\theta)=(-1)^m d^L_{0m}(\theta)=[4\pi/(2L+1)]^{1/2}\mathrm{e}^{-im\phi}Y_{Lm}(\theta,\phi)$$

例えば

$$d^L_{00}(\theta)=P_L(\theta)$$
$$d^L_{10}(\theta)=-[L(L+1)]^{-1/2}\sin\theta P'_L(\theta)$$
$$d^L_{20}(\theta)=[(L-1)L(L+1)(L+2)]^{-1/2}[2P'_{L-1}(\theta)-L(L-1)P_L(\theta)] \tag{D. 18}$$

c．$j=L+1/2$（半整数）のとき

$P'_L=dP_L/d\cos\theta$ として

$$d^j_{1/2,1/2}(\theta)=(L+1)^{-1}\cos\frac{\theta}{2}(P'_{j+1/2}-P'_{j-1/2})$$

$$d^j_{-1/2,1/2}(\theta)=(L+1)^{-1}\sin\frac{\theta}{2}(P'_{j+1/2}+P'_{j-1/2})$$

$$d^j_{1/2,3/2}(\theta)=(L+1)^{-1}\sin\frac{\theta}{2}\left(\sqrt{\frac{j-1/2}{j+3/2}}P'_{j+1/2}+\sqrt{\frac{j+3/2}{j-1/2}}P'_{j-1/2}\right)$$

$$d^j_{-1/2,3/2}(\theta)=(L+1)^{-1}\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sqrt{\frac{j-1/2}{j+3/2}}P'_{j+1/2}+\sqrt{\frac{j+3/2}{j-1/2}}P'_{j-1/2}\right) \tag{D. 19}$$

参 考 文 献

1) M.E. Rose : Elementary Theory of Angular Momentum, New York : Wiley (1957)
2) M. Jacob and G.C. Wick : *Anals of Phys*., **7** (1959) 404

E　C, P, T 変換性

場が各種変換でどのように変換するかをまとめておく．以下 $|q, p, \sigma\rangle$ は，粒子 (q) または反粒子 $(\bar{q})$ の空間運動量 p，スピン状態 σ を表す状態量とする．P には P 変換の位相 η_P が，C, T には η_C, η_T が一般にはかかるが，簡単のためすべて位相因子を省略した．

P：

$$(x, t)\rightarrow(-x, t) \tag{E. 1}$$
$$P|q, p, \sigma\rangle=|q, -p, \sigma\rangle \tag{E. 2}$$

スカラー　$\phi(x, t) \to \phi(-x, t)$

擬スカラー　$P(x, t) \to -P(-x, t)$

ベクトル　$V^{\mu}(x, t) \to V_{\mu}(-x, t)$

軸性ベクトル　$A^{\mu}(x, t) \to -A_{\mu}(-x, t)$

電磁場　$F^{\mu\nu}(x, t) \to F_{\mu\nu}(-x, t)$

ディラックスピノール　$\psi(x, t) \to \gamma^0\psi(-x, t),\ \ \bar{\psi}(x, t) \to \bar{\psi}(-x, t)\gamma^0$

ディラック双1次形

$$
\begin{array}{lll}
S & \bar{\psi}_1\psi_2 & \to \bar{\psi}_1\psi_2 \\
P & \bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2 & \to -\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2 \\
V & \bar{\psi}_1\gamma^{\mu}\psi_2 & \to \bar{\psi}_1\gamma_{\mu}\psi_2 \\
A & \bar{\psi}_1\gamma^5\gamma^{\mu}\psi_2 & \to -\bar{\psi}_1\gamma^5\gamma_{\mu}\psi_2 \\
T & \bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2 & \to \bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2
\end{array}
\tag{E. 3}
$$

C:

$$C|q,\ p,\ \sigma\rangle = |\bar{q},\ p,\ \sigma\rangle \tag{E. 4}$$

スカラー　$\phi(x, t) \to \phi^{\dagger}(x, t)$

擬スカラー　$P(x, t) \to P^{\dagger}(x, t)$

ベクトル　$V^{\mu}(x, t) \to -V^{\dagger\mu}(x, t)$

軸性ベクトル　$A^{\mu}(x, t) \to A^{\dagger\mu}(x, t)$

電磁場　$F^{\mu\nu}(x, t) \to -F^{\mu\nu}(x, t)$

ディラックスピノール　$\psi(x, t) \to C\bar{\psi}^{T}(x, t) = i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^{T},$

$$\bar{\psi}(x, t) \to -\psi^{T}(x, t)C^{-1}$$

$$C^{-1}\gamma^{\mu}C = -\gamma^{\mu T},\ \ C = -C^{\dagger} = -C^{-1} = -C^{T} = C^{*}$$

ディラック双1次形

$$
\begin{array}{lll}
S & \bar{\psi}_1\psi_2 & \to \bar{\psi}_2\psi_1 \\
P & \bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2 & \to \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_1 \\
V & \bar{\psi}_1\gamma^{\mu}\psi_2 & \to -\bar{\psi}_2\gamma^{\mu}\psi_1 \\
A & \bar{\psi}_1\gamma^5\gamma^{\mu}\psi_2 & \to \bar{\psi}_2\gamma^5\gamma^{\mu}\psi_1 \\
T & \bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2 & \to -\psi_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1
\end{array}
\tag{E. 5}
$$

T:

$$(x, t) \to (x, -t) \tag{E. 6}$$

$$(c-\text{数}) \to (c-\text{数})^{*} \tag{E. 7}$$

$$\langle \text{out}|H|\text{in}\rangle \to \langle T\text{in}|H|T\text{out}\rangle \tag{E. 8}$$

$$T|q,\ p,\ \sigma\rangle = \langle q,\ -p,\ -\sigma| \tag{E. 9}$$

スカラー	$\phi(x, t) \to \phi(x, -t)$
擬スカラー	$P(x, t) \to -P(x, -t)$
ベクトル	$V^{\mu}(x, t) \to V_{\mu}(x, -t)$
軸性ベクトル	$A^{\mu}(x, t) \to A_{\mu}(x, -t)$
電磁場	$F^{\mu\nu}(x, t) \to -F_{\mu\nu}(x, -t)$

ディラックスピノール　$\psi(x, t) \to B\psi(x, -t) = \gamma^3\gamma^1\psi(x, -t)$

$$= \gamma^5 C\psi(x, -t)$$

$$\bar{\psi}(x, t) \to \psi^T B^{-1} = \psi^T \gamma^1 \gamma^3$$

$$B^{-1}\gamma^{\mu *} B = \gamma_{\mu},\ B^{\dagger} = B^{-1} = -B^T$$

デイラック双1次形

S	$\bar{\psi}_1\psi_2$	$\to \bar{\psi}_1\psi_2$
P	$\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2$	$\to -\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2$
V	$\bar{\psi}_1\gamma^{\mu}\psi_2$	$\to \bar{\psi}_1\gamma_{\mu}\psi_2$
A	$\bar{\psi}_1\gamma^5\gamma^{\mu}\psi_2$	$\to \bar{\psi}_1\gamma^5\gamma_{\mu}\psi_2$
T	$\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2$	$\to -\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2$

(E. 10)

CP :　$(x, t) \to (-x, t)$　(E. 11)

$$CP|q,\ p,\ \sigma\rangle = |\bar{q},\ -p,\ \sigma\rangle \quad \text{(E. 12)}$$

スカラー	$\phi(x, t) \to \phi^{\dagger}(-x, t)$
擬スカラー	$P(x, t) \to -P^{\dagger}(-x, t)$
ベクトル	$V^{\mu}(x, t) \to -V_{\mu}{}^{\dagger}(-x, t)$
軸性ベクトル	$A^{\mu}(x, t) \to -A_{\mu}{}^{\dagger}(-x, t)$
電磁場	$F^{\mu\nu}(x, t) \to -F_{\mu\nu}(-x, t)$

デイラックスピノール　$\psi(x, t) \to \pm i\gamma^2 \bar{\psi}^T(-x, t)$,

$$\bar{\psi}(x, t) \to \mp \psi^T(-x, t) i\gamma^2$$

ティラック双1次形

S	$\bar{\psi}_1\psi_2$	$\to \bar{\psi}_2\psi_1$
P	$\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2$	$\to -\bar{\psi}_2\gamma^5\psi_1$
V	$\bar{\psi}_1\gamma^{\mu}\psi_2$	$\to -\bar{\psi}_2\gamma_{\mu}\psi_1$
A	$\bar{\psi}_1\gamma^5\gamma^{\mu}\psi_2$	$\to -\bar{\psi}_2\gamma^5\gamma_{\mu}\psi_1$
T	$\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2$	$\to -\bar{\psi}_2\sigma_{\mu\nu}\psi_1$

(E. 13)

演算を二つ以上組み合わせると，ディラックスピノールの変換式は一般に順序により最終結果の位相が異なる．しかし，双1次形式については $\eta^*\eta=1$ であるので順序によらない．

CPT：

C, P, T の変換をすべて組み合わせると，CPT 変換となる．この場合すべての座標を反転させると $[(x, t) \to (-x, -t)]$，T 変換を含むのでやはりアンチユニタリーであり，遷移要素などは複素数をとる．CPT 変換演算子を Θ と書き演算の要素をまとめると

$$(x, t) \xrightarrow{CPT} (-x, -t) \tag{E. 14}$$

$$c\text{-数} \longrightarrow (c\text{-数})^* \tag{E. 15}$$

$$\langle \mathrm{out}|H|\mathrm{in}\rangle \longrightarrow \langle \Theta\mathrm{in}|H|\Theta\mathrm{out}\rangle \tag{E. 16}$$

$$\Theta|q,\ p,\ \sigma\rangle \longrightarrow \langle \bar{q},\ p,\ -\sigma| \tag{E. 17}$$

スカラー　$\phi(x, t) \to \phi^\dagger(-x, -t)$

擬スカラー　$P(x, t) \to P^\dagger(-x, -t)$

ベクトル　$V^\mu(x, t) \to -V^{\dagger\mu}(-x, -t)$

軸性ベクトル　$A^\mu(x, t) \to -A^{\dagger\mu}(-x, -t)$

電磁場　$F^{\mu\nu}(x, t) \to F^{\mu\nu}(-x, -t)$

ディラックスピノール　$\psi(x, t) \to D\overline{\psi}^T(-x, -t) = \pm\gamma^0\gamma^5\overline{\psi}^T,$

$$\overline{\psi}^T(x, t) \to -\psi^T(-x, -t)D^{-1}$$

$$D^{-1}\gamma^\mu D = \gamma_\mu, \quad D^\dagger = D^{-1} = -D^T$$

ティラック双1次形

$$\begin{array}{lll} S & \overline{\psi}_1\psi_2 & \to \overline{\psi}_2\psi_1 \\ P & \overline{\psi}_1\gamma^5\psi_2 & \to \overline{\psi}_2\gamma^5\psi_1 \\ V & \overline{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2 & \to -\overline{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1 \\ A & \overline{\psi}_1\gamma^5\gamma^\mu\psi_2 & \to -\overline{\psi}_2\gamma^5\gamma^\mu\psi_1 \\ T & \overline{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2 & \to \overline{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1 \end{array} \tag{E. 18}$$

F　$SU(N)$ の数学的準備

F. 1　群　の　定　義

群 $G = \{A, B, C, \cdots\}$ とは次の条件を満たす元 $A, B, \cdot\cdot$ の集合である．

(1)　群の二つの元 A, B に対し積 AB が存在し，これもまた群に属すること．

(2)　結合則：$(AB)C = A(BC)$ が成立する．

(3)　単位元1が存在し，すべての元 A に対し，$1A = A1 = A$．

(4)　すべての元 A に対し，逆元 A^{-1} が存在し，$A^{-1}A = AA^{-1} = 1$．

特に，$AB = BA$ が成立するものを可換群（アーベル群）と呼ぶ．並進演算や2次元平面での回転が該当する．$AB \neq BA$ のとき，非可換群（非アーベル群）という．3

次元の回転や $SU(N)$, $N \geqq 2$ などがある．群が連続パラメターの解析関数であるとき，リー (Lie) 群という．特にわれわれが興味あるのは，コンパクト・リー群である．コンパクト (compact) とは簡単にいえば，パラメターの変数領域が空間の有限体積内に閉じるものをいう．例えば2次元空間の回転は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ でありコンパクトである．ローレンツ群は非コンパクト群の例である．

群の表現：群の任意の元 A に対応して行列 $U(A)$ もしくは演算子が存在し

$$U(A)U(B) = U(AB)$$
$$U(A^{-1}) = U^{-1}(A)$$
$$U(1) = 1 \ (\text{単位行列})$$

であるとき，この行列の集合を群 G の表現と呼ぶ．この行列の演算するベクトル空間を表現空間，次元 (n) を表現の次元という．

例1：回転群　$O(N)$

実数 $x_i\,(i=1\sim N)$ を座標にもつ N 次元空間において，$L=\sum_{i=1}^{N} x_i^2$ を不変にするすべての変換．

例2：ユニタリー群　$SU(N)$

複素数 u_i を座標にもつ N 次元複素空間において，$s=\sum_{i=1}^{N}|u_i|^2$ を不変にするすべての変換を，N 次元のユニタリー変換群という．その中でも変換の行列式 det U を1にするものを特殊 (special) ユニタリー群 $SU(N)$ という．

$$U^{\dagger} U = UU^{\dagger} = 1, \qquad \det U = 1 \tag{F.1}$$

条件 (F.1) を満たす独立な行列は，N^2-1 個存在するので，U を

$$U = \exp(-i\theta^i F_i) \qquad (i=1\sim N^2-1 \text{ の和}) \tag{F.2}$$

の形に書くと，F_i はエルミート行列であり，det $U=1$ の条件は，

$$\mathrm{Tr}(F_i) = 0 \tag{F.3}$$

ここに，θ^a は N^2-1 個の独立な連続実変数である．この F_i を $SU(N)$ 群の生成演算子 (generator) という．F_i は

$$[F_i, F_j] = if_{ijk}F_k \tag{F.4}$$

という関係を満たす．ここに k については和をとるものとする．このような F の集合がリー代数を形成する．群の性質は生成演算子の交換関係により完全に規定される．f_{ijk} は構造定数と呼ばれる．f_{ijk} の決め方はユニークではない．なぜなら，F_i の線形結合で別の独立な F_i' の組をつくれるからである[*1)]．f_{ijk} は，ijk 添字について反対称にできる．

$SU(N)$ の $n\times n$ 次の表現行列 U の演算する n 次元ベクトルを ψ と書くと，ψ は

---

*1) 例えば角運動量演算子 J_i の代わりに，線形結合 $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ を使えば，

$$[J_+, J_-] = 2J_3, \ [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$$

が成立する．

$$\psi=\begin{bmatrix}\xi^1\\ \xi^2\\ \cdot\\ \cdot\\ \xi^n\end{bmatrix},\qquad n\geqq N \tag{F.5}$$

$$\psi \longrightarrow \psi'=U\psi$$

$$\xi^{a\prime}=\sum_b^n U_{ab}\xi^b\equiv U^a{}_b\xi^b \tag{F.6}$$

によって変換される．$n=N$ の場合を基本表現，$n=N^2-1$ の場合を随伴表現 (adjoint representation) という．

随伴表現 (adjoint representaion)：$n=N^2-1$ の表現行列は，構造定数を使って表すことができる．

$$[F_a]_{bc}\quad (a, b, c=1\sim N^2-1)=-if_{abc} \tag{F.7}$$

証明：$[A, B]=-[B, A]$ およびヤコビの恒等式

$$[[A, B], C]+[[B, C], A]+[[C, A], B]=0 \tag{F.8}$$

に，$A=F_a$ などを入れて，(F. 4) を使えば，

$$f_{bac}=-f_{abc} \tag{F.9a}$$

$$f_{abd}f_{cde}+f_{bcd}f_{ade}+f_{cad}f_{bde}=0 \tag{F.9b}$$

が示せるので，これに (F. 7) を入れれば

$$[F_a, F_b]=if_{abc}F_c \tag{F.10}$$

よって，F_a は N^2-1 次元の表現行列である．(証明終)

ラグランジアン (または運動方程式) が，$SU(N)$ 変換によって変わらないとき，F_k は保存量である．同時に対角化可能な F_k の数 r を，この群のランクという．$SU(N)$ のランクは $N-1$ である．表現ベクトル (粒子) は，同時対角化可能な F_k の固有値 (量子数) により指定分類できる．F_k よりつくられ，すべての F_k と交換する行列をカシミヤ (Casimir) 演算子と呼ぶ．

ψ の複素共役 ψ^* の表現行列は U^* である．その生成演算子 $(-F_i^*)$ もまた (F. 4) の交換関係を満たすから，ψ^* もまた表現ベクトルであり ψ の共役表現という．ψ に粒子を対応させるときは ψ^* は反粒子を表すから，反粒子のもつ量子数は粒子の量子数の符号を変えたものとなる．ここで，共変ベクトル，

$$\psi^\dagger=(\psi^*)^T=(\xi^{1*}, \xi^{2*}, \cdots\xi^{N*})\equiv(\xi_1, \xi_2, \cdots\xi_N) \tag{F.11}$$

を定義すれば

$$\xi_a\rightarrow\xi_a{}'=\xi^{a*\prime}=\sum U^a{}_b{}^*\xi^{b*}=\sum U_{ab}{}^*\xi_b=\sum\xi_bU_{ba}{}^\dagger\equiv(U^\dagger)^b{}_a\xi_b$$

$$\psi^\dagger\rightarrow\psi^{\dagger\prime}=\psi^\dagger U^\dagger \tag{F.12}$$

表現行列 $U(A)$ が，任意の元 A に対し

$$U(A)=\left[\begin{array}{c|c|c} U_1(A) & 0 & 0 \\ \hline 0 & U_2(A) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array}\right] \qquad \text{(F. 13)}$$

のように書けるとき，この表現は可約 (reducible) であるといい

$$U=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_k \qquad \text{(F. 14)}$$

のように書く．このような分解ができないとき既約 (irreducible) であるという．

直積表現：元 $A=\{A_j\}$, $B=\{B_k\}$ をもつ二つの表現 $U(A)$, $U(B)$ があり，それぞれ n_A, n_B 次元であるとする．各表現の基底 ξ_j, η_k の積 $\xi_j\eta_k$ は $n_A\times n_B$ 次元の空間を張る．この空間での表現は $U(AB)$ は

$$U(AB)(\xi_j\eta_k)=\xi_j'\eta_k'=(U(A)\xi_j)(U(B)\eta_k) \qquad \text{(F. 15)}$$

で表される．これを直積表現といい

$$U(AB)=U(A)\otimes U(B) \qquad \text{(F. 16)}$$

のように書く．直積表現は一般に可約である．

F. 2　$SU(3)$ 群

基本表現：以下，物理的に理解しやすいように，$SU(3)$ の基本表現にクォークを対応させて考えることにする．各クォーク $q^i=(u, d, s)$ を，基本表現に対応させて

$$u=\xi^1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad d=\xi^2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad s=\xi^3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \text{(F. 17)}$$

と表す．

$SU(3)$ 群の生成演算子 λ_i を決めるために，次のように考える．$u\leftrightarrow d$ の $SU(2)$ 変換は，$SU(3)$ 群の一部に含まれるから，$\lambda_i(i=1, 2, 3)$ を，u, d のみに演算するように

$$\lambda_i=\begin{bmatrix} \tau_i & & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{(F. 18)}$$

にとると，λ_i はアイソスピン演算子である．同様に $u\leftrightarrow s$ の入れ替えも $SU(2)$ 演算であるので，アイソスピンにならって V スピンと名づけ，λ_4, λ_5, V_3 を

$$\lambda_4=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\qquad \lambda_5=\begin{bmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{bmatrix}\qquad V_3=\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&0&0\\0&0&-1/2\end{bmatrix} \qquad \text{(F. 19)}$$

によって定義する．同様に $d\leftrightarrow s$ を U スピン演算と名づけ，λ_6, λ_7, U_3 を

$$\lambda_6=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad \lambda_7=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{bmatrix}\qquad U_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1/2&0\\0&0&-1/2\end{bmatrix} \tag{F. 20}$$

とする．これで9個の行列が定義できたが，

$$I_3-V_3+U_3=0 \tag{F. 21}$$

であるので，

$$\lambda_8\equiv\sqrt{3}\,Y=(2/\sqrt{3})(U_3+V_3)=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix} \tag{F. 22}$$

を定義すれば，独立で同時に対角化可能な行列は I_3 と Y の2個であることがわかる．これらの行列は，

$$\left[\frac{\lambda_i}{2},\frac{\lambda_j}{2}\right]=if_{ijk}\frac{\lambda_k}{2} \tag{F. 23}$$

$$\left\{\frac{\lambda_i}{2},\frac{\lambda_j}{2}\right\}=\frac{1}{3}\delta_{ij}+id_{ijk}\frac{\lambda_k}{2} \tag{F. 24}$$

$$\mathrm{Tr}(\lambda_i\lambda_j)=2\delta_{ij} \tag{F. 25}$$

を満たす．f_{ijk}, d_{ijk} は，添字について，それぞれ反対称，全対称で表 F. 1 に示されるような値をもつ．

表 F. 1　$SU(3)$ の構造定数

$f_{123}=1$
$f_{147}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=f_{516}=f_{637}=1/2$
$f_{458}=f_{678}=\sqrt{3}/2$
$d_{118}=d_{228}=d_{338}=-d_{888}=1/\sqrt{3}$
$d_{146}=d_{157}=d_{256}=d_{344}=d_{355}=1/2$
$d_{247}=d_{366}=d_{377}=-1/2$
$d_{448}=d_{558}=d_{668}=d_{778}=-1/(2\sqrt{3})$

術語の定義：$F_a(n)$ を n 次元の表現行列とすれば

$$\mathrm{Tr}[F_a(n)F_b(n)]=T_R(n)\delta_{ab} \tag{F. 26a}$$

$$\sum_{a=1}^{N^2-1}F_a(n)^2=C_2(n)\mathbf{1} \tag{F. 26b}$$

$SU(N)$ の場合，$n=N$ を F (fundamental)，$n=N^2-1$ を A (adjoint) で表すと

$$T_R(N)\equiv T_R=1/2,\qquad T_R(N^2-1)=N=C_A \tag{F. 27a}$$

$$C_2(N)\equiv C_F=(N^2-1)/2N,\qquad C_2(N^2-1)\equiv C_A=N \tag{F. 27b}$$

$SU(3)$ の場合，

$$T_R=1/2,\qquad C_F=4/3,\qquad C_A=3 \tag{F. 28}$$

$C_2(n)$ の一般的な求め方は，§F. 4 で述べる．

***V*, *U* スピン**：V, U スピンの昇降下降演算子を次のように定義すれば，V, U ス

ピンの演算は I スピンの演算子とまったく同じように扱うことができる.

$$I_\pm=(\lambda_1\pm i\lambda_2)/2,\quad V_\pm=(\lambda_4\pm i\lambda_5)/2,\quad U_\pm=(\lambda_6\pm i\lambda_7)/2$$
$$2I_3=[I_+, I_-],\ 2V_3=[V_+, V_-],\ 2U_3=[U_+, U_-] \tag{F.29a}$$

クォークモデルでは, $q=(u, d, s)$ が, それぞれ量子数

$$I_3(q)=(1/2,\ -1/2,\ 0),\ V_3(q)=(1/2,\ 0,\ -1/2)$$
$$U_3(q)=(0,\ 1/2,\ -1/2),\ Y(q)=(1/3,\ 1/3,\ -2/3) \tag{F.29b}$$

をもつ. I_3-Y 平面に u, d, s をおき, 原点からのベクトルとして表すと図 F.1a のようになる (ウエイト図という). 積表現をつくるとき, u を掛算するということは, I_3, Y を 1/2, 1/3 だけ増加することに相当するので, I_3-Y 平面では, u ベクトルを加えることに相当する. 同様に d, s を掛算することは, d, s ベクトルを加えることに相当する.

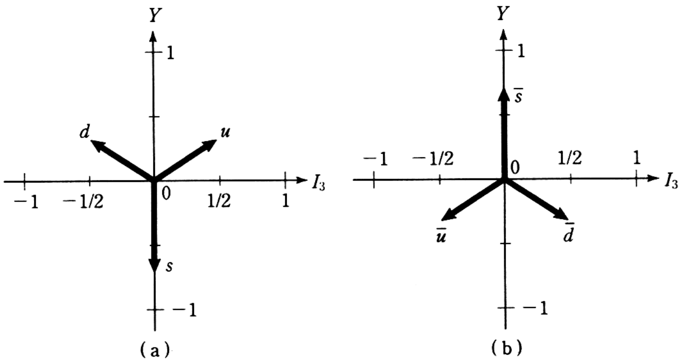


図 F.1　u, d, s は $(I_3, Y)=(1/2, 1/3)$, $(-1/2, 1/3)$, $(0, -2/3)$ をもつので (a) のようなベクトルとして表せる. (b) は $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$ のベクトル図である.

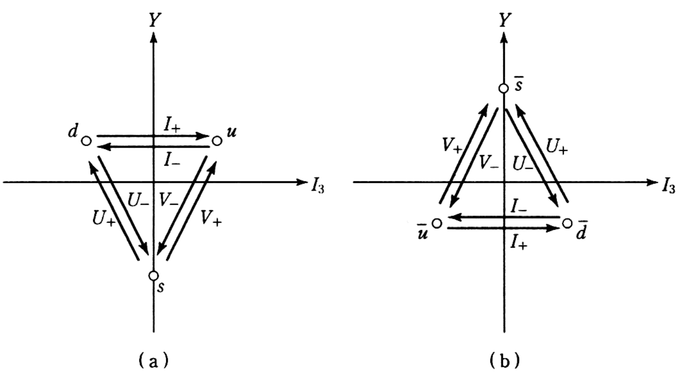


図 F.2　$I_\pm$, $V_\pm$, $U_\pm$ 演算は I_3-Y 平面で表現ベクトルを図のように動かす.

反クォーク $\bar{q}_i=(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ は，$I_3=(-1/2, 1/2, 0)$，$Y=(-1/3, -1/3, 2/3)$ をもつので，図 F.1 (b) のようになる．また，$I_\pm$ は $u \leftrightarrow d$，$-\bar{d} \leftrightarrow \bar{u}$，$V_\pm$ は $u \leftrightarrow s$，$-\bar{s} \leftrightarrow \bar{u}$，$U_\pm$ は $d \leftrightarrow s$，$-\bar{s} \leftrightarrow \bar{d}$ のおき換え（図 F.2）に対応する．

F.3　直積表現の既約化

a．メソン 8 重項 (octet)

クォークと反クォークの合成系で作るスピン 0 のメソンを考えてみよう．$SU(3)$ 表現では q と $\bar{q}$ の積表現 $\Phi^i{}_j=q^i\bar{q}_j$ をつくることになる．変換で，

$$q \to q'=Uq, \qquad \bar{q} \to \bar{q}'=\bar{q}U^\dagger \tag{F.30}$$

であるので，$\bar{q}q=\xi^i\xi_i=\bar{u}u+\bar{d}d+\bar{s}s$ は，$SU(3)$ 変換で不変である．

$$\therefore \quad \eta' \equiv (\bar{u}u+\bar{d}d+\bar{s}s)/\sqrt{3} \tag{F.31}$$

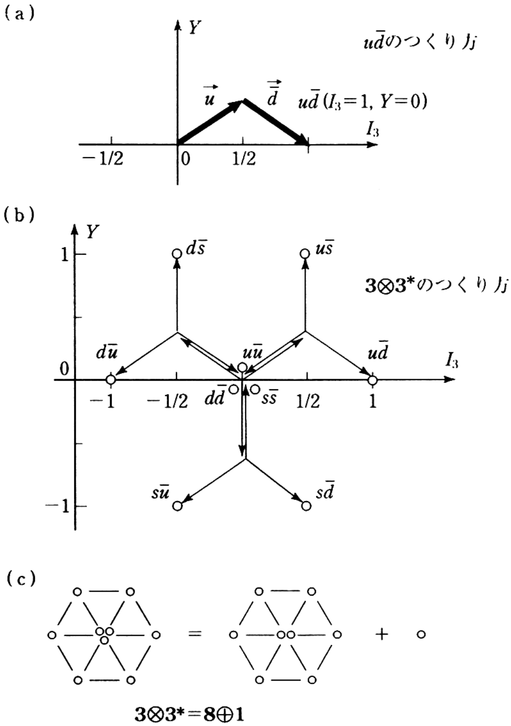


図 F.3　(a) u，$\bar{d}$ は (I_3, Y) として $(1/2, 1/3)$，$(1/2, -1/3)$ をもつので，$u\bar{d}$ は I_3-Y 平面ではベクトル和として得られ，(1, 0) をもつ．
(b)，(a) の演算をすべての要素について行えば，$q^i\bar{q}_j$ のすべてが，ベクトル和として得られ，
(c) $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}^*=\mathbf{9}=\mathbf{8}\otimes\mathbf{1}$ となる．

は $SU(3)$ 群の規約表現に属する基底ベクトルであり，一重項 (singlet) を構成する．9 個の積ベクトル $\Phi^i{}_j=\xi^i\xi_j$ から (F. 31) を引いた残りの 8 個 $P^i{}_j=\xi^i\xi_j-(1/3)\mathrm{Tr}(\Phi^i{}_j)$ は独立であり変換によって互い混じるのでこれ以上分解できない．

以上の議論から，3 個の q_i と 3 個の $\bar{q}_j$ の積表現は 1 個と 8 個の 2 組に分けられることが導けた．これを，

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}^*=\mathbf{1}\oplus\mathbf{8} \tag{F. 32}$$

のように表す．これをを別の見方から導いてみよう．$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}^*$ の直積表現の基底ベクトルは，**3** に属する u, d, s に，$\mathbf{3}^*$ に属する $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$ を掛算した九つのベクトルよりなる．いま，3 に $\bar{u}$ を掛けることを考えてみよう．例えば，I_3-Y 平面上で，$u\bar{d}$ ベクトルは u ベクトルに $\bar{d}$ ベクトルを足して得られ，その位置は，図 F. 3 (a) に示すように，$I_3=1$，$Y=0$ の位置となる．3 に属するすべてのベクトルに $\mathbf{3}^*$ に属するすべてのベクトルを加えたものの頂点をプロットすると，図 F.3 (b) のようになる．この全体で 9 個の点は六角形を形成し，外側の点は一重点，中の点は三重点である．

3 重点の一つは既約表現の 1 重項 (1) に属するから，8 重項は，6 角形の辺の各点と中心の 2 重点から構成されることになる．

b. バ リ オ ン

バリオンをつくるために，まずクォーク 2 個よりなる 9 個の積ベクトル $T^{ij}=\xi^i\xi^j$ の変換性を見てみよう．これは一般に既約ではない．しかし，

$$T^{ij}=\frac{1}{2}(\xi^i\xi^j-\xi^i\xi^j)+\frac{1}{2}(\xi^i\xi^j+\xi^i\xi^j)=A^{ij}+S^{ij} \tag{F. 33}$$

のように，対称な部分と反対称な部分に分けることができる．対称性は変換により変わらないから，9 個の積ベクトル T^{ij} が，6 個の対称な表現と 3 個の反対称な表現に分解できたことになる．すなわち

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{3}^*\oplus\mathbf{6} \tag{F. 34}$$

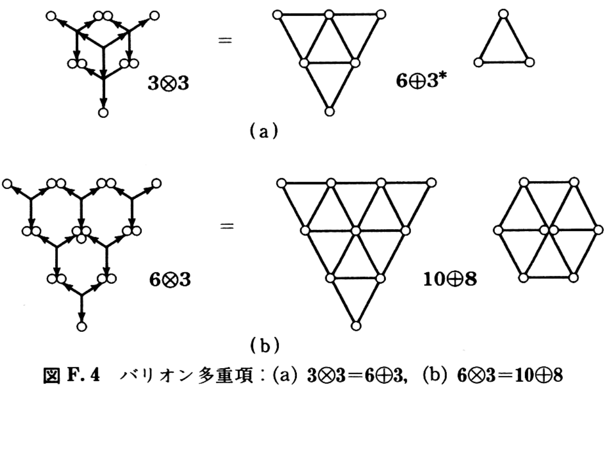


図 F. 4　バリオン多重項：(a) $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{6}\oplus\mathbf{3}$，(b) $\mathbf{6}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{10}\oplus\mathbf{8}$

ベクトル表示では，図 F. 4 (a) のように表される．3 個の A^{ij} が，**3** でなく **3*** に属することは，量子数 (I_3, Y) を見れば一目瞭然であるが，数学的には次のように証明する．

$$\eta_i \equiv \varepsilon_{ijk} A^{jk}, \tag{F. 35}$$

とすると，

$$B = \eta_i \xi^i \tag{F. 36}$$

は，$SU(3)$ 変換の不変量である．なぜなら，

$$\begin{aligned} B' &= \eta_i' \xi'^i = \varepsilon_{ijk} \xi'^i \xi'^j \xi'^k = \varepsilon_{ijk} U^i{}_l U^j{}_m U^k{}_n \xi^l \xi^m \xi^n \\ &= \varepsilon_{lmn} \det U \xi^l \xi^m \xi^n = \varepsilon_{lmn} \xi^l \xi^m \xi^n = B \end{aligned} \tag{F. 37}$$

これから η の変換行列は，$(U^{-1})^T = U^*$ であることがいえるから，η は **3*** に属する．T^{ij} にさらに **3** の ξ^k を掛けると，(F. 33) の第 1 項との掛算 $(A^{ij}\xi^k)$ からは，

$$\mathbf{3^* \otimes 3 = 1 \oplus 8} \tag{F. 38}$$

が出てくることはメソンの場合と同様である．ただし，メソンの場合と違い，(F. 33) の A^{ij} に ξ^k を掛けて全反対称にしたもの（それは (F. 36) の B に等しい）が一重項となり，残りの 8 個が八重項となる．T^{ij} の第 2 項との積 $(S^{ij}\xi^k)$ からは，18 個のベクトルがつくられるが，このうち 3 個の添字すべてについて全対称のもの 10 個が一つの既約表現をつくり，残りの 8 個が別の既約表現をつくる．すなわち，

$$\mathbf{6 \otimes 3 = 8 \oplus 10} \tag{F. 39a}$$

となり，結局

$$\begin{array}{llllllll} \mathbf{3\otimes3\otimes3=1} & \oplus & \mathbf{8} & \oplus & \mathbf{8} & \oplus & \mathbf{10} \\ \text{対称性：}\ \mathrm{A} & & \mathrm{MA} & & \mathrm{MS} & & \mathrm{S} \end{array} \tag{F. 39b}$$

が導けた．このうち **1** は 3 個の添字について，全反対称 (A＝antisymmetric) であり，**10** は全対称 (S＝symmetric) である．二つの **8** は，I_3-Y 平面では同じ位置を占めるが，上記のつくり方からわかるように混合した対称性を示しており，一方は最初の 2 個の添字について対称 (MS＝mixed and symmetric) であり，他方は反対称 (MA＝mixed and antisymmetric) と対称性が異なる．

これら既約表現のルート図は F. 4 (a), (b) に与えてある．

c．既約表現ルート図の一般的規則

積表現を既約表現の和に分解する一般的な方法はヤング図を使って得られる（後述 § F. 5 参照）．既約表現のルート図については次のような定理がある．

定理 1：I_3-Y 平面に既約表現の多角形をプロットすると以下のことが成立する（証明略）．

(1)　多角形は必ず外に向かって凸であり，一般には不等辺六角形をなす（図 F. 5）．

(2)　一番外側の辺上にある点は一重点である．

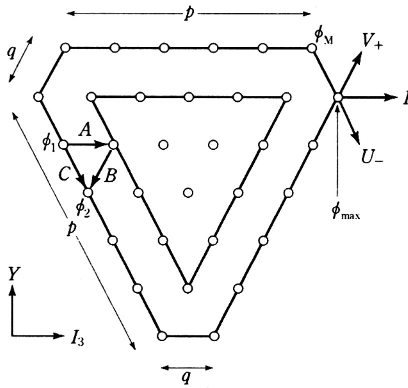


図 F. 5　既約表現 $D^N(p, q)=D^{48}$ (5.1)
辺長 p と q の不等辺六角形となる．多重度は内側にいくたびに 1 ずつ増すが，三角形になった後は増加しない．ϕ_{Max} は，最大の I_3 をもつ要素 ($I_3=(p+q)/2=3$) である．ϕ_1 から ϕ_2 へ移るとき，$\to A(=I_+)\to B(V_-)$ のルートと，$\to C(U_-)$ のルートがある．多重度が 1 のときは，ϕ_2 はルートによらず唯一に決まる．多重度が 2 以上のときは，道筋によりいきつく状態が異なる．

(3)　外から 2 番目の辺上の点は二重点である．以下一つ内側に入るたびに多重度が一つ増す．

(4)　三角形になったところで多重度の増加は止まり，後はどれだけ内側に進んでも多重度は変わらない．特別な場合として，三角形既約表現の多重度はすべて 1 である．

F. 4　テンソル算

一般の積ベクトルまたはテンソル (p 個の上つき添字，q 個の下つき添字をもつものとする) $T^{(p)}{}_{(q)}=T^{ij\cdots}{}_{mn\cdots}$ は，

$$(T^{ij\cdots}{}_{mn\cdots})'=U^i{}_aU^j{}_b\cdots U^{\dagger c}{}_mU^{\dagger d}{}_n\cdots T^{ab\cdots}{}_{cd\cdots} \qquad \text{(F. 40)}$$

のように変換する．$q=0$ のとき p 階の反変テンソル，$p=0$ のとき q 階の共変テンソル，$p, q\neq 0$ のとき混合テンソルという．このテンソルの全体を (p, q) で表すことにする．このテンソルのウエイト図は，上辺の長さが p，下辺の長さが q の六角形となる (図 F. 5 参照)．p または q の何れか一方が 0 のときは三角形になる．

$\delta_i{}^j\equiv\delta_j{}^i\equiv\delta_{ij}$ が $p=q=1$ の混合テンソル，ε_{ijk}，ε^{ijk} がそれぞれ 3 階の共変，反変テンソルであることは容易に証明できるので，これらを掛算したものはやはりテンソルである．(F. 40) で表されるテンソルは，一般には既約表現に属さず可約であるので，$\delta^i{}_j$，ε_{ijk}，ε^{ijk} などとの縮約をつくり，階数を低くすることが可能である．例えば，(p, q) に属するテンソル $T^{ijk\cdots}{}_{abc\cdots}$ から $\delta^a{}_i$ や ε_{abc} を使ってつくる

$$R^{jk\cdots}{}_{bc\cdots}\equiv\delta^a{}_iT^{ijk\cdots}{}_{abc\cdots}=T^{ijk\cdots}{}_{ibc\cdots} \qquad \text{(F. 41a)}$$

$$S^{k\cdots}{}_{abcd\cdots}\equiv\varepsilon_{aij}T^{ijk\cdots}{}_{bcd\cdots} \tag{F. 41b}$$

は，それぞれ $(p-1,\ q-1)$, $(p-2, q+1)$ に属するテンソルとなる．トレースレスであったり，すでに対称化されているものは，この演算で0になり，それ以上階数を低くできないからそれは既約表現である．したがって，既約表現のテンソルは，上つき添字または下つき添字については，すべて対称化してあり，かつトレースレスであるようなテンソルである．すなわち

$$T^{ij\cdots}{}_{in\cdots}=0 \tag{F. 42}$$

を満たす．対称化してあるから，トレースレスの条件は (F. 42) 一つでよい．このテンソル空間の表現を $D^N(p, q)$ と表す．ただし N は独立な元の数で，

$$N=(p+1)(q+1)(p+q+2)/2 \tag{F. 43}$$

で与えられる．

証明：上つき添字 $ij\cdots$ について，$\underbrace{\underbrace{11\cdots}_{a\text{個}}\ \underbrace{222}_{b\text{個}}\cdot\cdot}_{p\text{個}}33\cdot$ のように並べると，おのおのの $a(0\leqq a\leqq p)$ に対して，b は $0\sim p-a$ までの，$(p-a+1)$ 通りの選び方がある．したがって，上つき添字の独立な並べ方 N_u は，

$$N_u=\sum_{a=0}^{p}(p-a+1)=(p+1)(p+2)/2$$

下つきの添字についても同じく，$N_d=(q+1)(q+2)/2$ 通りあるので，全体で，

$$N_uN_d=(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)/4$$

通りの並べ方がある．次にトレースレスの条件は，$p\to p-1$, $q\to q-1$ とした分だけあるので，差し引くと，

$$N=(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)/4-p(p+1)q(q+1)/4=(p+1)(q+1)(p+q+2)/2$$

（証明終）

いくつかの例：

$$D^1(0, 0)=1,\ D^3(1, 0)=3,\ D^3(0, 1)=3^*,\ D^8(1, 1)=8,\ D^6(2, 0)=6,$$
$$D^6(0, 2)=6^*,\ D^{10}(3, 0)=10,\ D^{10}(0, 3)=10^*, \cdots \tag{F. 44}$$

次に，ウエイト図で三角形（p または $q=0$）の多重度が1であることを示そう．

$$I_3=\{n(u)+n(d)-n(\bar{u})-n(\bar{d})\}/2 \tag{F. 45a}$$
$$Y=\{n(u)+n(d)-2n(s)-n(\bar{u})-n(\bar{d})+2n(\bar{s})\}/3 \tag{F. 45b}$$
$$p=n(u)+n(d)+n(s)$$
$$q=n(\bar{u})+n(\bar{d})+n(\bar{s})$$

であるから，q（または p）が0のときは，p（または q），I_3, Y を指定すれば，$n(q)$ は一義的に決まる．すなわちウエイト図上での多重度は1である．

カシミヤ演算子：$C_2\equiv C_2(n)=F^2=\sum_k(F_k)^2$ の求め方

F_k の代わりに，I, V, U スピンの演算子を使って書き表すと，

$$F^2=\{I_+, I_-\}/2+I_3^2+\{V_+, V_-\}/2+\{U_+, U_-\}/2+\frac{3}{4}Y^2$$
$$=(I_-I_++V_-V_++U_+U_-)+I_3^2+2I_3+(3/4)Y^2 \qquad (\mathrm{F.46})$$

多重項は，I_3-Y 平面で必ず凸であるので，多重項の中で最大の I_3 をもつ要素 ϕ_{MAX} (図 F.5) に対して，

$$I_+\phi_{\mathrm{MAX}}=V_+\phi_{\mathrm{MAX}}=U_{-\mathrm{MAX}}=0 \qquad (\mathrm{F.47})$$

ゆえに，この ϕ_{MAX} の I_3，Y がわかれば，

$$\langle F^2\rangle=\langle I_3^2\rangle+2\langle I_3\rangle+(3/4)Y^2 \qquad (\mathrm{F.48})$$

最大の I_3 は，p 個すべてを u, q 個すべてを $\bar{d}$ として得られるから，$I_3=(p+q)/2$ である．このとき，$Y=(p-q)/3$ であるので，

$$\langle F^2\rangle=\frac{(p^2+pq+q^2)}{3}+(p+q) \qquad (\mathrm{F.49})$$

例：
$$C_2(1)=\langle F^2\rangle_1(p=q=0) \qquad =0$$
$$C_2(3)=\langle F^2\rangle_3(p=1,\ q=0)=\langle F^2\rangle_{3*}=4/3$$
$$C_2(6)=\langle F^2\rangle_6(p=2,\ q=0) \qquad =10/3$$
$$C_2(8)=\langle F^2\rangle_8(p=q=1) \qquad =3$$
$$C_2(10)=\langle F^2\rangle_{10}(p=3,\ q=1) \qquad =6 \qquad (\mathrm{F.50})$$

F.5　ヤ　ン　グ　図[2)]

ここで，$SU(N)$ での積表現を既約表現の和に分解する簡便な方法を証明なしに述べておく．

(1)　ヤング図は，箱一つを N 次元の基本表現に，$N-1$ 個の箱を縦にならべたもの（列）をその共役表現 N^* に対応させる．したがって，

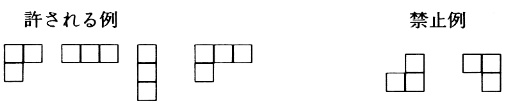
$SU(2)$：□$=\mathbf{2}$ または $\mathbf{2}^*$

$SU(3)$：□$=\mathbf{3}$, $=\mathbf{3}^*$ (F.51)

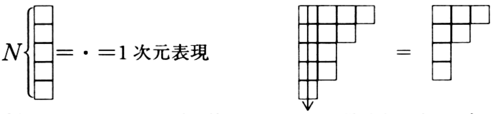
(2)　任意の既約表現を，縦（列）および横（行）に列べた n 個の箱で表す．この n 個の箱の配置は左上に向かって凸でなければならない．この意味は，第 1 行の箱の数を λ_1，第 2 行の箱の数を $\lambda_2\cdots$，最後の第 m 行の箱の数を λ_m とするとき，

$$\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\lambda_m, \qquad \lambda_1+\lambda_2+\cdot\cdot\lambda_m=n \qquad (\mathrm{F.52})$$

を意味する．

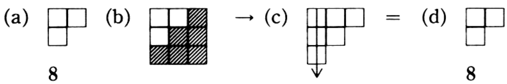


(3) 行方向の任意の要素の交換に関しては対称，列方向に対しては反対称の性質をもたせる．この要請のため，列方向の箱の最大数は $N-1$ である．なぜならば，$SU(N)$ の場合交換して反対称にできる要素の最大数は N であり，しかも N 個の要素を全反対称にできる組み合わせはただ一通りしかない．したがって，$m \geqq N$ 個の箱をもつ列がなくても次元数は変わらないので，この列は削ってよい．この条件を $N=5$ について図示すると



(F. 53)

(4) ある表現に対して，それにつなげば $N \times N$ の配置になる表現を共役表現という．例えば $SU(3)$ の場合



(c) は (b) からわかるように，(a) の共役表現である．そして (3) の規則によって (d)=(c) である．よって，(a) の 8 は共役表現が自身と同じの自己共役表現である ($8^*=8$).

表現 A と表現 B の積をつくる方法

(i) 表現 B の第 1 行の箱すべてに数字 1 を，第 2 行の箱すべてに 2 を，以下順に数字を詰めていく．

(ii) 次に，表現 B の第 1 行から順にすべての箱を，あらゆる可能なやり方で表現 A につなげる．

このとき，

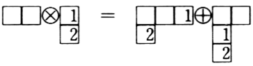
(a) 左上に凸という条件は守る．

(b) 一つの行の中では，左から右へ数が小さくなってはいけない．

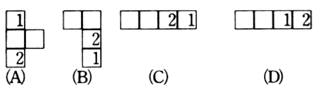
(c) 同じ列の中では，付加したすべての箱は違う数をもち，かつ上から下へ数が大きくならなければならない．

(d) 1 行目に右から入り左端に出る．次に 2 行目に移り，以下全部の箱を右から左へ順に横切る線を引く．この線上の任意の点でそれまでに通過した数字 i の数を n_i とするとき，$n_i \geqq n_{i-1}$ でなければならない．

例 1　正しい処方

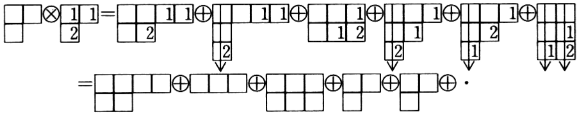


禁止例



(A), (B) 図は (a) の条件，(C) は条件 (b) を満たさない．(D) は右から最初の箱で止まる線をつくると $n_2 \geqq n_1$ となるので，条件 (d) を満たさない．

例 2　$SU(3)$ で $8\otimes8$ をつくる．



$\therefore$　$\mathbf{8\otimes8=27\oplus10\oplus10^*\oplus8\oplus8\oplus1}$　(F. 54)

8には同じ形のヤング図が二つあるが，数字の組み合わせ方が違うので，別の表現となる．

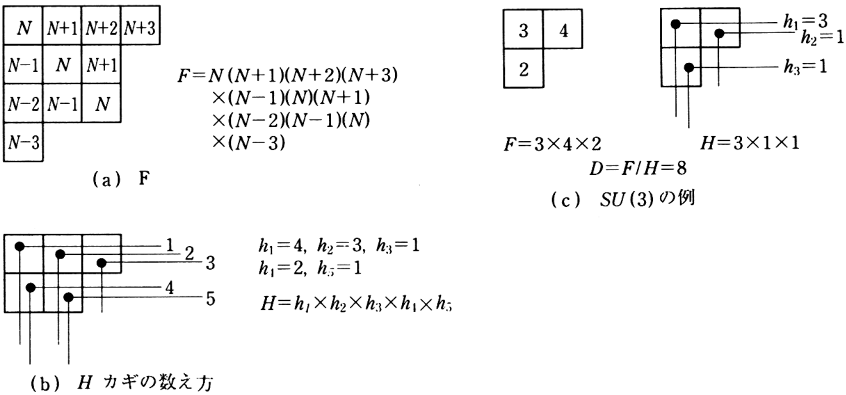


図 F. 6　ヤング図，次元数 $D=F/H$ の数え方

既約表現の多重度 D の数え方

$D=F/H$ で与えられる．

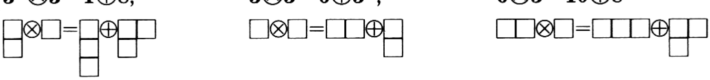
F の算出法：ヤング図の左上隅の箱に N を入れる．右にいけば 1 ずつ増やし（$N+1$, $N+2, \cdots$），下にいけば順に 1 ずつ減らす（第 2 行第 1 列ならば $N-1$）（図 F. 6 (a)）．F はすべての箱の中の数の積である．

H の算出法：任意の行に右から入り，任意の箱で下に曲がって下に出る線を引く．これをカギという．一つのカギの道筋にある箱の数を h とするとき，H はすべての h の積である (F. 6 (b))．

図 F. 6 (c) の例では，$SU(3)$ として

$$D=\frac{3\times4\times2}{3\times1\times1}=8 \tag{F. 55}$$

例 3：$\mathbf{3^*\otimes3=1\oplus8}$,　　$\mathbf{3\otimes3=6\oplus3^*}$,　　$\mathbf{6\otimes3=10\oplus8}$



例 4：$SU(4)$

4 種のクォークからつくれるハドロンは，ヤング図を使えば容易に計算できて

メソン：　$\mathbf{4}\otimes\mathbf{4}^{*}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{15}$ (F. 56)

バリオン：$\mathbf{4}\otimes\mathbf{4}\otimes\mathbf{4}=\mathbf{4}\oplus\mathbf{20}\oplus\mathbf{20}\oplus\mathbf{20}$ (F. 57)

対称性：　A　MS　MA　S

であり，対称性は，$SU(3)$ の場合とまったく同じである．$SU(3)$ では一重項だったところが四重項になったのは，4 個のクォークから 3 個のクォークで全反対称の波動関数をつくる組み合わせが 4 通りあるからである．$SU(3)$ での八重項はチャームクォークを含むバリオンを 12 個を加え，十重項は 10 個加えたことになる．

例 5：$SU(5)$

$$\mathbf{5}\otimes\mathbf{5}^{*}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{24}$$

$$\mathbf{5}\otimes\mathbf{5}=\underset{\text{A}}{\mathbf{10}}\oplus\underset{\text{S}}{\mathbf{15}}$$

$$\mathbf{5}^{*}\otimes\mathbf{10}=\mathbf{5}\oplus\mathbf{45}$$

$$\mathbf{5}\otimes\mathbf{10}=\mathbf{40}\oplus\mathbf{10}^{*}$$

$$\mathbf{10}\otimes\mathbf{10}=\mathbf{5}^{*}\oplus\mathbf{45}^{*}\oplus\mathbf{50}$$

$$\mathbf{10}^{*}\otimes\mathbf{10}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{24}\oplus\mathbf{75} \tag{F. 58}$$

例 6：$SU(6)$

スピンの上下，香りの u, d, s 状態を基底のベクトル（$\psi^{T}=(u\uparrow, u\downarrow, d\uparrow, d\downarrow, s\uparrow, s\downarrow)$）とした $SU(6)$ を考えると，

メソン　：$\mathbf{6}\otimes\mathbf{6}^{*}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{35}$ (F. 59)

バリオン：$\mathbf{6}\otimes\mathbf{6}\otimes\mathbf{6}=\mathbf{20}\oplus\mathbf{70}\oplus\mathbf{70}\oplus\mathbf{56}$ (F. 60)

対称性：　A　MS　MA　S

参考文献

1) 例えば，P.A. Carruthers: Introduction to Unitary Symmetry, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons (1966)
F.E. Close: An Introduction to Quarks and Leptons, Academic Press (1979)

2) 例えば，ジョージアイ著，九後汰一郎訳：物理学におけるリー代数，吉岡書店（1990）

G　質量行列と T, CPT 変換

ここでは，K^0 と $\bar{K}^0$ の 2 体系の時間推移を記述する実効ハミルトニアンとしての質量行列がどのように表されるかを厳密な証明なしに直感的に導く．どれだけの近似が含まれ，どのような条件で有効かについては，原論文 1) もしくは 2) を参照してほしい．K^0 とその反粒子である $\bar{K}^0$ は，強い相互作用の固有状態であり，ストレン

ジネスによって区別される．強い相互作用ではストレンジネスが保存されるので，両者が混合することはない．$\bar{K}^0$ と K^0 は，CP がよい量子数であれば位相を適当に選んで，

$$|\bar{K}^0\rangle = CP|K^0\rangle, \qquad |K^0\rangle = CP|\bar{K}^0\rangle \tag{G.1}$$

のように定義できる．弱い相互作用が入ると，ストレンジネスを保存しない（$\Delta S=1$）過程が可能であり，

$$K^0 \longleftrightarrow 2\pi, 3\pi, \pi l\nu \longleftrightarrow \bar{K}^0 \tag{G.2}$$

などを通して混合が起こる．この過程は，弱い相互作用の少なくも 2 次の効果である．ハミルトニアン H を，H_S（強い相互作用）と H_W（弱い相互作用）に分けて，摂動の 2 次までを考えることにすれば，遷移を引き起こす S 行列は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} S_{fi} &= 1 - 2\pi i\delta(E_i - E_f)T_{fi} \\ T_{fi} &= \langle f|H_W|i\rangle + \sum \frac{\langle f|H_W|n\rangle\langle n|H_W|i\rangle}{E_i - E_n + i\varepsilon} \end{aligned} \tag{G.3}$$

主値積分の記号 P を使えば，

$$\frac{1}{E_i - E_n + i\varepsilon} = \frac{P}{E_i - E_n} - i\pi\delta(E_i - E_n)$$

である．$K^0, \bar{K}^0$ の 2 体の運動方程式は，K の静止系で，これに質量項（$\langle i|H_S|j\rangle = M_i\delta_{ij}$）を加えた質量行列 $\widetilde{M}$ によって記述できる．

$$\widetilde{M}_{ij} \equiv M_i\delta_{ij} + T_{ij} \equiv M_{ij} - \frac{i}{2}\Gamma_{ij} \tag{G.4}$$

$$M_{ij} = M_i\delta_{ij} + \langle i|H_W|j\rangle + P\sum \frac{\langle i|H_W|n\rangle\langle n|H_W|j\rangle}{M_j - E_n} \tag{G.5}$$

$$\Gamma_{ij} = 2\pi\sum\delta(M_j - E_n)\langle i|H_W|n\rangle\langle n|H_W|j\rangle \tag{G.6}$$

H_W がエルミートであるから，M_{ij} および Γ_{ij} もまたエルミートであるが，$\widetilde{M}_{ij}$ はエルミートではない．弱い相互作用の固有状態は，この $\widetilde{M}$ を対角化して得られ，その固有値を λ_σ，固有状態を $|\sigma\rangle$ とすれば，

$$\lambda_\sigma = m_\sigma - i\frac{\Gamma_\sigma}{2}, \qquad |\sigma(t)\rangle = |\sigma(0)\rangle e^{-i\lambda_\sigma t} \tag{G.7}$$

となり，平均寿命 $\tau = (\Gamma_\sigma)^{-1}$ で崩壊する状態を表す．

次に，$|\alpha\rangle$ の CPT 変換した状態を $\langle\Theta\alpha|$ で表すことにすれば，CPT 不変性は，

$$\begin{aligned} \langle\alpha|H|\beta\rangle &= \langle\alpha|\Theta^{-1}\Theta H\Theta^{-1}\Theta|\beta\rangle \\ &= \langle\Theta\beta|H|\Theta\alpha\rangle \end{aligned} \tag{G.8}$$

と表される．$|\Theta\alpha\rangle$ は，$|\alpha\rangle$ から，粒子を反粒子に，スピン成分を反転して得られる（位相の不定性は残る．以下他のすべての変換も同じ）．K の場合は $|\Theta K\rangle = |\bar{K}\rangle$．同様に T 不変性は，

$$\langle\alpha|H|\beta\rangle = \langle\alpha|T^{-1}THT^{-1}T|\beta\rangle$$

$$=\langle T\beta|H|T\alpha\rangle \tag{G.9}$$

であり，$|T\alpha\rangle$ は，$|\alpha\rangle$ の運動量の符号とスピン成分を逆にしたものに適当な位相因子をかけたものである．K の静止系では，$|TK\rangle=|K\rangle$．CP 不変の場合は，

$$\langle\alpha|H|\beta\rangle=\langle\alpha|CP^{-1}CPHCP^{-1}CP|\beta\rangle$$
$$=\langle CP\alpha|H|CP\beta\rangle \tag{G.10}$$

で，$|CP\alpha\rangle$ は，$|\alpha\rangle$ から，粒子を反粒子にして，運動量の符号を変え，適当な位相因子とパリティ固有値をかけて得られる．

CPT 変換を質量行列に適用すると，質量項および (G.3) の第 1 項は (G.8) をそのまま適用できるが，第 2 項については，

$$T_{fi}=\sum\frac{\langle f|\Theta^{-1}H_W\Theta|n\rangle\langle n|\Theta^{-1}H_W\Theta|i\rangle}{E_i-E_n+i\varepsilon}=\sum\frac{\langle\Theta n|H_W|\Theta f\rangle\langle\Theta i|H_W|\Theta n\rangle}{E_i-E_n+i\varepsilon}$$
$$=\sum\frac{\langle\Theta i|H_W|\Theta n\rangle\langle\Theta n|H_W|\Theta f\rangle}{E_i-E_n+i\varepsilon}=\langle\Theta i|T|\Theta f\rangle \tag{G.11}$$

CPT 変換はスピンの向きを変えるので，$|\Theta n\rangle\neq|n\rangle$ であるが，和をとれば差はなくなる．また $E_i=E_f$ であるので，結局

$$\langle f|\widetilde{M}|i\rangle=\langle\Theta i|\widetilde{M}|\Theta f\rangle \tag{G.12}$$

が言えたことになる．$i=f=K^0$, $\Theta K^0=\bar{K}^0$ とすれば，

$$M_{11}=M_{22},\qquad \Gamma_{11}=\Gamma_{22} \tag{G.13}$$

これから，K^0 と $\bar{K}^0$ は，同じ質量と同じ Γ (全崩壊率) をもつことがわかる．この議論は一般化できて，すべての粒子と反粒子は同じ質量，同じ寿命をもつ．$\widetilde{M}_{12}$ と $\widetilde{M}_{21}$ に関しては，CPT 保存からは何もいえないが，CP 保存を適用すれば，

$$\widetilde{M}_{12}=\widetilde{M}_{21} \tag{G.14}$$

が結論される．

崩壊振幅[3]：散乱行列 S を S_0 と S_D に分ける．S_0 は崩壊を起こす相互作用がないときの散乱行列であり，$|A\rangle$ をそのときの固有状態つまり安定状態とする．$|B\rangle$ を $|A\rangle$ 以外の状態とすれば，$\langle A|S_0|B\rangle=0$ が成立する．S_0, S_D ともにユニタリーであるから，

$$S_0^\dagger S_D+S_D^\dagger S_0+1=0 \tag{G.15}$$

これを，A と B の間で挟めば，

$$\langle A|S_0^\dagger|A\rangle\langle A|S_D|B\rangle+\langle A|S_D^\dagger|B\rangle\langle B|S_0|B\rangle=\langle A|S|B\rangle+\langle A|S^\dagger|B\rangle\langle B|S_0|B\rangle=0 \tag{G.16}$$

もし $|B\rangle$ が，S_0 の散乱固有状態であれば，

$$S_0|B\rangle=e^{i2\delta}|B\rangle \tag{G.17}$$

であるので，$S_{AB}=\delta_{AB}-i2\pi\delta(E_A-E_B)T_{AB}$ を使って，

$$\langle A|T|B\rangle=e^{i2\delta}\langle A|T^\dagger|B\rangle=e^{i2\delta}\langle B|T|A\rangle^* \tag{G.18}$$

CPT が保存すれば，(G.8) を入れて，

$$\langle \Theta B|T|\Theta A\rangle = e^{i2\delta}\langle B|T|A\rangle^* \tag{G. 19}$$

T が保存すれば，(G. 9) を入れて，

$$\langle B|T|A\rangle = e^{i2\delta}\langle B|T|A\rangle^* \tag{G. 20}$$

(G. 20) は，崩壊振幅が，

$$\langle B|T|A\rangle = \pm e^{i\delta}|\langle B|T|A\rangle| \tag{G. 21}$$

と書けることを示す．つまり散乱の位相をとりだした残りの崩壊振幅は，T が保存すれば（CPT が保存していれば，CP 保存則でも同じ），実数でなければならない．

参 考 文 献

1) E.P. Wigner and V.F. Weisskopf : *Z. Phys*., **64** (1930) ; **65** (1930) 18
2) O. Nachtman : Elementary Particle Physics, Springer-Verlag (1989) Appendix I, p. 513
3) P.K. Cabir : The CP Puzzle ; Strange Decays of the Neutral Kaon, Academic Press (1968), Appendix C.

H　フィールツ (Fierz) 変換

4-フェルミ相互作用でディラック場の順序を変える際の変換式のこと．

いま $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ をディラック場とすると，4-フェルミ相互作用のラグランジアンは一般に

$$\Gamma_i = (\overline{\psi}_1 O_i \psi_2)(\overline{\psi}_3 O_i \psi_4) \tag{H. 1}$$

$$O_i = 1(S),\ \gamma^\mu(V),\ \sigma^{\mu\nu}(T),\ \gamma^\mu\gamma^5(A),\ \gamma^5(P)$$

の形をしている．これを

$$\Gamma_i = \textstyle\sum_j C_{ij}(\overline{\psi}_1 O_j \psi_4)(\overline{\psi}_3 O_j \psi_2) \tag{H. 2}$$

の形に展開したときフィールツ変換をしたという．このように書ける事を証明し，C_{ij} を求めるために Γ_i を成分で表すと，

$$\Gamma_i = \sum_{a,b,c,d} (\overline{\psi}_{1a} O_{iab} \psi_{2b})(\overline{\psi}_{3c} O_{icd} \psi_{4d}) \tag{H. 3}$$

$$= \sum O_{iab} O_{icd} \overline{\psi}_{1a} \psi_{2b} \overline{\psi}_{3c} \psi_{4d} = -\sum O_{iab} O_{icd} \overline{\psi}_{1a} \psi_{4d} \overline{\psi}_{3c} \psi_{2b}$$

$$\equiv \sum M_{\mathrm{ac;db}} \overline{\psi}_{1a} \psi_{4d} \overline{\psi}_{3c} \psi_{2b} \tag{H. 4}$$

a, b, c, d はすべて 1～4 までの値をとるから，a, d を固定すると $M_{ac;ab}$ は 4×4 行列と見なすことができる．したがって，16 個の独立な行列 O_i で展開することができる．

$$\therefore \quad M_{ac;db} = B^S{}_{ad}(1)_{cb} + B^V{}_{\mu ad}(\gamma^\mu)_{cb} + B^T{}_{\mu\nu ad}(\sigma^{\mu\nu})_{cb}$$

$$+ B^A{}_{\mu ad}(\gamma^\mu\gamma^5)_{cb} + B^P{}_{ad}(\gamma^5)_{cb} \tag{H. 5}$$

B^i を求めるために，両辺に $(O_i)_{bc}$ を掛けてトレースをとる．$\Gamma_i = V$ として，まず

$O_i=1$ とすると

右辺$=B^S{}_{ad}(1)_{bc}(1)_{cb}=4B^S_{ad}$，他の係数$=0$

左辺$=-(\gamma^\mu)_{ab}(1)_{bc}(\gamma_\mu)_{cd}=-(\gamma^\mu\gamma_\mu)_{ad}=-4\delta_{ad}$

$$\therefore\quad B^S_{ad}=-(1)_{ad}\longrightarrow C_{21}=-1 \tag{H. 6}$$

次に $O_i=\gamma^\nu$ とすると

右辺$=B_{\mu ad}{}^V(\gamma^\nu)_{bc}(\gamma^\mu)_{cb}=4g^{\mu\nu}B_{\mu ad}{}^V$，他の係数$=0$　(H. 7)

左辺$=-(\gamma^\mu)_{ab}(\gamma^\nu)_{bc}(\gamma_\mu)_{cd}=+2(\gamma^\nu)_{ad}\longrightarrow C_{22}=1/2$

以下同様に，すべての16個の係数を求めることができる．表 H. 1 にこうして求めた係数 C_{ij} を示す．

表 H. 1　フィールツ変換係数

$i\backslash j$	S	V	T	A	P
S	$-1/4$	$-1/4$	$-1/8$	$1/4$	$-1/4$
V	-1	$1/2$	0	$1/2$	1
T	-3	0	$1/2$	0	-3
A	1	$1/2$	0	$1/2$	-1
P	$-1/4$	$1/4$	$-1/8$	$-1/4$	$-1/4$

$$\Gamma_i'=(\bar{\psi}_1O_i\gamma^5\psi_2)(\bar{\psi}_3O_i\psi_4) \tag{H. 8}$$

の場合は，上の変換式で $\gamma^5\psi_2\rightarrow\psi_2'$ とおけば，

$$\begin{aligned}\Gamma_i'&=\sum C'_{ij}(\bar{\psi}_{1a}O_{jab}\psi_{4b})(\bar{\psi}_{3c}(O_j\gamma^5)_{cd}\psi_{2d})\\&=M'_{ac;bd}\,\bar{\psi}_{1a}\psi_{2d}\bar{\psi}_{3c}\psi_{4b}\end{aligned} \tag{H. 9}$$

と書けることを使うと，同じように計算できて $C'_{ij}=C_{ij}$ を与える．表から

$$\textstyle\sum_j C_{ij}C_{jk}=\delta_{ik} \tag{H. 10}$$

が証明できるが，これは2回変換すれば元にもどることを考えると当然である．特別な場合として

$$(\bar{\psi}_1\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_2)(\bar{\psi}_3\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_4)=(\bar{\psi}_1\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_4)(\bar{\psi}_3\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_2) \tag{H. 11}$$

索　　　引

第Ⅰ巻：1 ～ 262 頁，第Ⅱ巻：263 ～ 489 頁.

ア　行

カ　行

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ　行

著者略歴

長島順清（ながしま よりきよ）

1938年　東京都に生まれる
1965年　東京大学大学院数物系研究科
　　　　博士課程修了
現　在　大阪大学大学院理学系研究科
　　　　物理学専攻・教授
　　　　理学博士

朝倉物理学大系 4
素粒子物理学の基礎 II　　定価はカバーに表示

1998年12月1日　初版第1刷

著　者　長　島　順　清
発行者　朝　倉　邦　造
発行所　株式会社　朝　倉　書　店
東京都新宿区新小川町 6-29
郵便番号　162-8707
電　話　03(3260)0141
F A X　03(3260)0180
http://www.asakura.co.jp

〈検印省略〉

平河工業社・渡辺製本

ISBN 4-254-13674-9 C 3342　　Printed in Japan